Серре,
(J.-A.),
членъ Института и Астрономическаго Бюро (Bureau des Longitudes).

# ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ,

Переводъ безъ измѣненій съ послѣдняго (8 го) французскаго изданія

**М. В. ПИРОЖКОВА,**
преподавателя Спб. 10-й гимназіи.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 5 л., 28.
**1902.**

3108

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 23 ноября 1901 г.

# ПРЕДИСЛОВІЕ ПЕРЕВОДЧИКА.

*Traité de Trigonométrie* par **J.-A. Serret** состоитъ изъ шести главъ; въ первыхъ трехъ главахъ изложены основы теоріи круговыхъ функцій, составленіе и употребленіе тригонометрическихъ таблицъ и прямолинейную тригонометрію въ собственномъ смыслѣ. Эти три главы и переведены мною подъ именемъ *Прямолинейной тригонометріи* **Серре**. Въ нихъ есть все, что требуется въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, а также для поступленія въ высшія спеціальныя учебныя заведенія.

Четвертая глава французскаго изданія посвящена сферической тригонометріи, пятая есть дополненіе къ теоріи круговыхъ функцій и, наконецъ, въ шестой говорится о такихъ прямолинейныхъ и сферическихъ треугольникахъ, рѣшеніе которыхъ основано на употребленіи рядовъ.

Четвертая и шестая главы въ переводѣ составятъ особый выпускъ подъ заглавіемъ: *Сферической тригонометріи* **Серре**. Этотъ выпускъ предназначается для всѣхъ, изучающихъ *Геодезію* и *Астрономію*.

Наконецъ, пятая глава въ переводѣ составитъ также особый выпускъ и можетъ служить пособіемъ для всѣхъ, приступающихъ къ изученію высшихъ частей математики.

*М. В. Пирожковъ.*

# ОПЕЧАТКИ.

| *Стран.* | *Строка.* | *Напечатано:* | *Должно быть:* |
|---|---|---|---|
| 112 | 1 снизу | $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$, | $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ |
| 128 | *Черт.* 26 | *Внизу должна быть буква* $E$, *а повыше* $F$. | |

# ОГЛАВЛЕНІЕ.


Стр.

ПРЕДИСЛОВІЕ ПЕРЕВОДЧИКА . . . . . III
ОПЕЧАТКИ. . . . . IV

## ГЛАВА ПЕРВАЯ.

### Основы теоріи круговыхъ функцій.

*Опредѣленіе слова: „функція“* (§ 1). . . . . 1
*Объ измѣреніи длинъ* (§ 2) . . . . . 1
*Дуги круга* (§§ 3—4) . . . . . 2
*Опредѣленіе тригонометрическихъ линій* (§ 5) . . . . . 3
*Измѣненіе тригонометрическихъ линій* (§§ 6—8) . . . . . 5
*Дуги, соотвѣтствующія данной тригонометрической линіи* (§§ 9—10). 10
*Соотношенія между тригонометрическими линіями одной и той же дуги* (§§ 11—13) . . . . . 13
*Формулы, относящіяся къ сложенію дугъ* (§§ 14—17) . . . . . 17
*Нѣкоторыя важныя формулы, выводимыя изъ формулъ, относящихся къ сложенію дугъ* (§§ 18—20) . . . . . 21
*Умноженіе дугъ* (§§ 21—24) . . . . . 25
*Дѣленіе дугъ* (§§ 25—32) . . . . . 29
*Опредѣленіе тригонометрическихъ линій нѣкоторыхъ дугъ* (§§ 33—39). 38
*Замѣчаніе о соотношеніяхъ между различными тригонометрическими линіями* (§§ 40—42) . . . . . 46
**УПРАЖНЕНІЯ** . . . . . 50

## ГЛАВА ВТОРАЯ.

### Тригонометрическія таблицы.

*Предварительныя предложенія* (§§ 43—47) . . . . . 51
*Дѣленіе окружности* (§ 48) . . . . . 55
*Составленіе Таблицы синусовъ и косинусовъ* (§§ 49—52). . . . . 56
*Таблицы логарифмовъ круговыхъ функцій* (§ 53). . . . . 62
*Расположеніе Таблицъ Каллета* (§ 54). . . . . 63
*Употребленіе Таблицъ* (§§ 55—57) . . . . . 65
*Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логарифмическихъ вычисленій. (Введеніе вспомогательнаго угла)* (§ 58). . . . . 74

Стр.

*Рѣшеніе уравненія второй степени при помощи Тригонометрическихъ таблицъ* (§§ 59—60) . . . . . 76
*Рѣшеніе уравненія третьей степени при помощи Тригонометрическихъ таблицъ* (§§ 61—64) . . . . . 79
УПРАЖНЕНІЯ . . . . . 86

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

### Прямолинейная тригонометрія.

*Предметъ Прямолинейной тригонометріи* (§ 65) . . . . . 87
*Измѣреніе угловъ* (§ 65) . . . . . 87
*Соотношенія между углами и сторонами прямоугольнаго треугольника* (§ 67) . . . . . 89
*Соотношенія между углами и сторонами косоугольнаго треугольника* (§§ 68—72) . . . . . 90
*Другія формулы, относящіяся къ косоугольнымъ треугольникамъ* (§§ 73—74) . . . . . 96
*Выраженія для площади треугольника и для радіусовъ вписаннаго и описаннаго круговъ* (§§ 75—77) . . . . . 98
*Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ* (§§ 78—82) . . . . . 101
*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны одна сторона и два угла* (§§ 83—84) . . . . . 103
*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ* (§§ 85—86) . . . 104
*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними* (§§ 87—88) . . . . . 103
*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны три стороны* (§§ 89—90) . . . . . 111
*Различные случаи, гдѣ данныя не исключительно стороны и углы* (§§ 91—90) . . . . . 112
*О вписанномъ четыреугольникѣ* (§ 97) . . . . . 117
*Дѣйствія на земной поверхности* (§ 98) . . . . . 119
*Задачи изъ Практической тригонометріи* (§§ 99—159) . . . . . 122
УПРАЖНЕНІЯ . . . . . 131

# ГЛАВА ПЕРВАЯ.

## Основы теоріи круговыхъ функцій

*Опредѣленіе слова: „функція".*

§ 1. Когда двѣ *перемѣнныя* величины таковы, что каждому значенію одной соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе другой, то такія величины называются *функціями* одна другой. Напр., для круга окружность и площадь суть функціи радіуса, и, обратно, радіусъ есть функція окружности или площади круга.

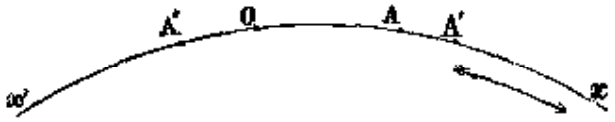
*Тригонометрія* основана на теоріи нѣкоторыхъ функцій, возникающихъ при разсмотрѣніи круга и называемыхъ поэтому *круговыми функціями*. Мы начнемъ съ изложенія основъ этой теоріи.

*Объ измѣреніи длинъ.*

§ 2. Пусть $O$ (*черт.* 1) есть неподвижная точка на нѣкоторой прямой или кривой линіи $x'x$, и предположимъ, что отъ этой точки $O$ отложены на $x'x$ различныя длины: $OA$, $OA'$, $OA''$, ... Эти длины, отнесенныя къ одной и той же единицѣ, выразятся нѣкоторыми числами, которымъ мы придадимъ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, въ какую сторону отъ точки $O$ будутъ отложены соотвѣтственныя имъ длины. Другими словами, длины, отложенныя въ одномъ (произвольномъ) направленіи, будутъ *положительными* количествами, а въ другомъ—*отрицательными*.

Если, напр., взять за направленіе положительныхъ длинъ направленіе $Ox$, указанное на чертежѣ стрѣлкою, а точки $A$, $A'$, $A''$

считать отстоящими отъ точки $O$ соотвѣтственно на 7, 9, 6 метровъ и принять, кромѣ того, метръ за линейную единицу, то длины: $OA$, $OA'$, $OA''$ выразятся соотвѣтственно числами: $+7$, $+9$, $-6$. Итакъ, если $a$ есть положительное или отрицательное количество,




*Черт.* 1.

выражающее нѣкоторую длину, отсчитанную на $x'x$ отъ точки $O$, то число единицъ, заключающихся въ этой длинѣ, будетъ $+a$ или $-a$, смотря по тому, какое будетъ $a$, положительное или отрицательное.

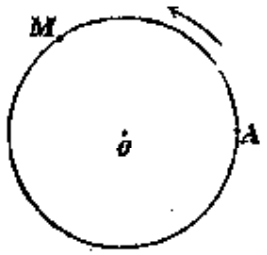
Поэтому, при движеніи перемѣнной точки отъ $O$, то въ одномъ, то въ другомъ направленіи, мы будемъ разсматривать различныя части $x'x$, пройденныя этою движущеюся точкою, или какъ положительныя, или какъ отрицательныя, смотря по тому, пройдены ли онѣ въ направленіи $Ox$, или въ противоположномъ направленіи $Ox'$. Обозначая черезъ $a$, $b$, $c$, $d$, . . . . положительныя или отрицательныя количества, которыми измѣряются длины, пройденныя въ послѣдовательномъ порядкѣ перемѣнною точкою, а черезъ $x$ разстояніе, на которомъ остановилась эта движущаяся точка отъ точки $O$, мы всегда можемъ написать равенство:

$$x=a+b+c+d+\ldots$$

## *Дуги круга.*

**§ 3.** При изученіи круговыхъ функцій радіусъ мы всегда будемъ принимать за единицу. Пусть $O$ (*черт.* 2) есть кругъ; окружность его выражается черезъ $2\pi$, а квадрантъ (четверть окружности) черезъ $\frac{\pi}{2}$. Пусть $A$ есть неподвижная точка окружности, а $M$ — движущаяся отъ точки $A$ въ направленіи $AB$, указанномъ стрѣлкою; дуги въ этомъ направленіи мы будемъ считать *положительными*. Дуга $AM$ въ началѣ движенія равна нулю; затѣмъ она увеличивается и достигаетъ значенія $2\pi$, когда движущаяся точка возвращается въ точку отправленія. Можно представить, что движеніе

продолжается и далѣе, такъ что движущаяся точка можетъ описать дугу, состоящую изъ одной или нѣсколькихъ окружностей. Если движеніе точки $M$ происходитъ въ направленіи, обратномъ разсмот-




*Черт.* 2.

рѣнному, то описанная дуга будетъ отрицательною, по *абсолютной* же *величинѣ* она пройдетъ всѣ значенія, начиная съ 0. Такимъ образомъ, дуга круга есть количество, принимающее всевозможныя значенія, отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Неподвижный конецъ $A$ перемѣнной дуги $AM$ называется *началомъ дуги*.

Если $\alpha$ обозначаетъ одну изъ дугъ, оканчивающихся въ одной и той же точкѣ $M$, то всѣ такія дуги $x$ выразятся формулою:

$$x = 2k\pi + \alpha,$$

гдѣ $k$ есть какое-угодно цѣлое число, положительное, равное нулю или отрицательное; дѣйствительно, двѣ дуги съ общимъ началомъ и общимъ концомъ, могутъ отличаться одна отъ другой, очевидно, только на цѣлое число окружностей.

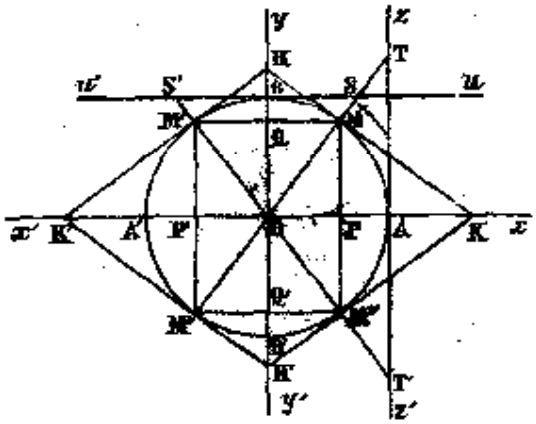
**§ 4. Дополнительныя и пополнительныя дуги.**—Двѣ положительныхъ дуги, или одна положительная, а другая отрицательная, называются *дополнительными* или *дополненіями* одна относительно другой, если ихъ сумма равна одному квадранту, или, что одно и то же, $\frac{\pi}{2}$.

Двѣ дуги называются *пополнительными* или *пополненіями* одна относительно другой, если ихъ сумма равна полуокружности, или, что одно и то же, $\pi$.

*Опредѣленіе тригонометрическихъ линій.*

**§ 5.** Ведемъ черезъ центръ круга $O$ (*черт.* 3) двѣ взаимноперпендикулярныя прямыя $Ox$ и $Oy$, пересѣкающія окружность соотвѣтственно въ точкахъ $A$ и $B$. Далѣе, ведемъ черезъ точки

*A* и *B* прямыя *Az* и *Bu*, соотвѣтственно параллельныя *Oy* и *Ox* и одинаково съ ними направленныя: изъ Геометріи извѣстно, что прямыя *Az* и *Bu* будутъ касательными къ окружности. Наконецъ,




*Черт.* 3.

продолжаемъ прямыя: *Ox*, *Oy*, *Az* и *Bu* соотвѣтственно по направленіямъ: *Ox'*, *Oy'*, *Az'* и *Bu'*.

Примемъ за начало дугъ точку *A* и за направленіе положительныхъ дугъ направленіе отъ *A* къ *B*, по которому движется перемѣнная точка *M*. Кромѣ того, согласно принципу, изложенному въ § 2-мъ, длины, отложенныя на прямыхъ *x'x* и *y'y* отъ точки *O*, будутъ считаться положительными, если онѣ взяты соотвѣтственно въ направленіяхъ *Ox* и *Oy*; наоборотъ, онѣ будутъ считаться отрицательными, если взяты въ направленіи *Ox'* или *Oy'*. Точно такъ же, длины, отложенныя на *z'z* отъ точки *A* и на *u'u* отъ точки *B* будутъ считаться положительными въ направленіи *Az* или *Bu*; наоборотъ, онѣ будутъ отрицательными въ направленіи *Az'* или *Bu'*.

Обозначимъ теперь черезъ *x* положительное или отрицательное количество, выражающее перемѣнную дугу, конецъ которой *M* можетъ занимать всевозможныя положенія на окружности. Опускаемъ перпендикуляръ *MP* на *x'x* и перпендикуляръ *MQ* на *y'y*; продолжаемъ радіусъ *OM* до пересѣченія съ *u'u* въ точкѣ *S* и съ *z'z* въ точкѣ *T*; ведемъ, наконецъ, черезъ точку *M* касательную *HK*, пересѣкающую *y'y* въ *H* и *x'x* въ *K*. Длина *OQ* или ей равная *MP*, взятая съ надлежащимъ знакомъ, есть *синусъ* дуги *x*; длины *AT* и *OK*, взятыя также съ надлежащими знаками, суть *тангенсъ* и *секансъ* дуги *x*. Такимъ образомъ, можно высказать слѣдующія опредѣленія:

*Синусъ дуги есть положительное или отрицательное количество,*

*которымъ измѣряется перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги на діаметръ, проходящій черезъ начало.*

*Тангенсъ дуги есть положительное или отрицательное количество, которымъ измѣряется отрѣзокъ касательной, проведенной въ началѣ дуги, отъ точки касанія до встрѣчи съ діаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги.*

*Секансъ дуги есть положительное или отрицательное количество, которымъ измѣряется отрѣзокъ діаметра, проходящаго черезъ начало дуги, отъ центра до встрѣчи съ касательной, проведенной въ конецъ дуги.*

*Косинусомъ, котангенсомъ* и *косекансомъ* дуги называются синусъ, тангенсъ и секансъ дополнительной дуги.

Обозначаемъ, какъ всегда, черезъ $x$ перемѣнную дугу, конецъ которой есть $M$; можно утверждать, что если точку $B$ принять за новое начало дугъ и новыя положительныя дуги отсчитывать въ направленіи отъ $B$ къ $A$, то дуга $\frac{\pi}{2} - x$ будетъ оканчиваться такъ же, какъ и $x$, въ точкѣ $M$. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы описать дугу $\frac{\pi}{2} - x$, мы можемъ изъ точки $B$, служащей ея началомъ, пойти сперва въ точку $A$, а затѣмъ изъ точки $A$ описать или дугу $-x$, принимая за направленіе положительныхъ дугъ направленіе отъ $B$ къ $A$, или же дугу $x$, предполагая, что положительныя дуги идутъ въ направленіи отъ $A$ къ $B$. Очевидно, что такимъ путемъ мы придемъ въ точку $M$.

Отсюда вытекаетъ, что косинусъ дуги $x$ есть длина $MQ$, или равная ей $OP$, взятая съ надлежащимъ знакомъ, а котангенсъ и косекансъ той же самой дуги будутъ соотвѣтственно длины, равныя $BS$ и $OH$, взятыя каждая съ надлежащимъ знакомъ.

Синусъ, тангенсъ, секансъ, косинусъ, котангенсъ и косекансъ дуги $x$ обозначаются слѣдующимъ образомъ:

$$\sin x,\ \operatorname{tang} x,\ \sec x,\ \cos x,\ \cot x,\ \operatorname{cosec} x;$$

ихъ называютъ *тригонометрическими линіями* или *круговыми функціями.*

### *Измѣненіе тригонометрическихъ линій.*

**§ 6.** Изслѣдуемъ, какъ измѣняются всѣ шесть тригонометрическихъ линій дуги $x$, когда сама дуга измѣняется отъ $+\infty$ до $-\infty$.

Когда $x$ возрастаетъ отъ 0 до $+\frac{\pi}{2}$, то всѣ шесть тригонометрическихъ линій остаются все время положительными; $\sin x$ возрастаетъ отъ 0 до $+1$, проходя черезъ всѣ промежуточныя значенія; $\operatorname{tang} x$ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$ и $\sec x$ возрастаетъ отъ 1 до $+\infty$. Три остальныхъ линіи, наоборотъ, уменьшаются: $\cos x$ отъ 1 до 0, $\cot x$ отъ $+\infty$ до 0 и $\operatorname{cosec} x$ отъ $+\infty$ до $+1$.

Такимъ образомъ, если обозначить черезъ $\varepsilon$ убывающую положительную дугу, имѣющую предѣломъ нуль, то

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \cos 0 &= +1, \\ \operatorname{tang} 0 &= 0, & \cot \lim \varepsilon &= +\infty, \\ \sec 0 &= +1, & \operatorname{cosec} \lim \varepsilon &= +\infty, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{\pi}{2} &= +1, & \cos \tfrac{\pi}{2} &= 0, \\ \operatorname{tang} \lim \left(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) &= +\infty, & \cot \tfrac{\pi}{2} &= 0, \\ \sec \lim \left(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) &= +\infty, & \operatorname{cosec} \tfrac{\pi}{2} &= +1. \end{aligned}$$

Когда $x$ возрастаетъ отъ $+\frac{\pi}{2}$ до $+\pi$, $\sin x$ и $\operatorname{cosec} x$ остаются положительными, но четыре остальныхъ тригонометрическихъ линіи будутъ отрицательными; $\sin x$ убываетъ отъ $+1$ до 0; $\operatorname{tang} x$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до 0; $\sec x$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $-1$; $\cos x$ убываетъ отъ 0 до $-1$; $\cot x$ убываетъ отъ 0 до $-\infty$ и $\operatorname{cosec} x$ возрастаетъ отъ $+1$ до $+\infty$. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\operatorname{tang} \lim \left(\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty, \qquad \sec \lim \left(\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

и

$$\begin{aligned} \sin \pi &= 0, & \cos \pi &= -1, \\ \operatorname{tang} \pi &= 0, & \cot \lim (\pi - \varepsilon) &= -\infty, \\ \sec \pi &= -1. & \operatorname{cosec} \lim (\pi - \varepsilon) &= +\infty. \end{aligned}$$

Когда $x$ возрастаетъ отъ $+\pi$ до $+\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tang} x$ и $\cot x$ снова дѣлаются положительными, но четыре остальныхъ линіи будутъ отрицательными; $\sin x$ убываетъ отъ 0 до $-1$; $\operatorname{tang} x$ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$; $\sec x$ убываетъ отъ $-1$ до $-\infty$; $\cos x$ возрастаетъ отъ $-1$ до 0; $\cot x$ убываетъ отъ $+\infty$ до 0, и $\operatorname{cosec} x$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $-1$. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\cot \lim (\pi + \varepsilon) = + \infty, \quad \operatorname{cosec} \lim (\pi + \varepsilon) = - \infty,$$

и

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = 0,$$
$$\operatorname{tang} \lim \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = + \infty, \qquad \cot \frac{3\pi}{2} = 0,$$
$$\sec \lim \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = - \infty, \qquad \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Когда $x$ возрастаетъ отъ $\frac{3\pi}{2}$ до $2\pi$, $\cos x$ и $\sec x$ становятся положительными, но четыре остальныхъ линіи будутъ отрицательными; $\sin x$ возрастаетъ отъ $-1$ до 0; $\operatorname{tang} x$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до 0; $\sec x$ убываетъ отъ $+\infty$ до $+1$; $\cos x$ возрастаетъ отъ 0 до $+1$; $\cot x$ убываетъ отъ 0 до $-\infty$, и $\operatorname{cosec} x$ убываетъ отъ $-1$ до $-\infty$. Такимъ образомъ,

$$\operatorname{tang} \lim \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = - \infty, \quad \sec \lim \left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = + \infty,$$

и

$$\sin 2\pi = 0, \qquad \cos 2\pi = +1,$$
$$\operatorname{tang} 2\pi = 0, \qquad \cot \lim (2\pi - \varepsilon) = - \infty,$$
$$\sec 2\pi = +1, \qquad \operatorname{cosec} \lim (2\pi - \varepsilon) = - \infty.$$

Когда $x$ станетъ возрастать отъ $2\pi$ до $4\pi$, отъ $4\pi$ до $6\pi$, . . . , то всѣ шесть тригонометрическихъ линій будутъ принимать періодически тѣ же самыя значенія и въ томъ же самомъ порядкѣ.

Когда $x$ убываетъ отъ 0 до $-\infty$, $\cos x$ и $\sec x$ проходятъ тѣ же самыя значенія какъ и тогда, когда $x$ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$; четыре остальныхъ тригонометрическихъ линіи принимаютъ по абсолютной величинѣ также тѣ же самыя значенія какъ и тогда, когда $x$ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$, но по знаку будутъ противоположены этимъ послѣднимъ. Это провѣряется непосредственно, если замѣтить, что концы обѣихъ дугъ $x$ и $-x$, равныхъ, но противоположенныхъ по знаку, расположены съ одной и той же стороны $yy'$ на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ $xx'$. Такимъ образомъ, каково бы ни было $x$,

$$\sin (-x) = -\sin x, \qquad \cos (-x) = \cos x,$$
$$\operatorname{tang} (-x) = -\operatorname{tang} x, \qquad \cot (-x) = -\cot x,$$
$$\sec (-x) = \sec x, \qquad \operatorname{cosec} (-x) = -\operatorname{cosec} x.$$

Далѣе, такъ какъ тригонометрическія линіи принимаютъ снова тѣ же самыя значенія, когда прибавляютъ къ дугѣ произвольное число окружностей, то, каково бы ни было $x$,

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + x) &= \sin x, & \cos(2k\pi + x) &= \cos x, \\ \operatorname{tang}(2k\pi + x) &= \operatorname{tang} x, & \cot(2k\pi + x) &= \cot x, \\ \sec(2k\pi + x) &= \sec x, & \operatorname{cosec}(2k\pi + x) &= \operatorname{cosec} x, \end{aligned}$$

гдѣ $k$ обозначаетъ какое-угодно цѣлое число, положительное или отрицательное.

**§ 7.** Пусть $x$ есть какая-нибудь дуга, положительная или отрицательная. Очевидно, что концы двухъ дугъ: $x$ и $x + \pi$ находятся на одномъ и томъ же діаметрѣ; слѣдовательно, ихъ синусы, косинусы, секансы и косекансы равны по абсолютной величинѣ и противоположны по знаку, тангенсы же и котангенсы одинаковы какъ по абсолютной величинѣ, такъ и по знаку. Такимъ образомъ,

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x, \\ \operatorname{tang}(\pi + x) &= \operatorname{tang} x, & \cot(\pi + x) &= \cot x, \\ \sec(\pi + x) &= -\sec x, & \operatorname{cosec}(\pi + x) &= -\operatorname{cosec} x. \end{aligned}$$

Функціи $\operatorname{tang} x$ и $\cot x$ не измѣняются при увеличеніи $x$ на $\pi$; поэтому говорятъ, что эти функціи — періодическія и что $\pi$ есть *амплитуда періода* или просто *періодъ*. Равнымъ образомъ, четыре остальныхъ тригонометрическихъ линіи суть также періодическія функціи отъ $x$, но ихъ періодъ равенъ $2\pi$; дѣйствительно, мы видѣли, что тригонометрическія линіи не измѣняются при увеличеніи $x$ на цѣлое число окружностей. Предыдущія равенства показываютъ, что $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ измѣнятся только по знаку при увеличеніи $x$ на полупериодъ $\pi$.

Измѣняя въ послѣднихъ равенствахъ $x$ на $-x$ и принимая во вниманіе формулы предыдущаго параграфа, получаемъ:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x, & \operatorname{cce}(\pi - x) &= -\cos x, \\ \operatorname{tang}(\pi - x) &= -\operatorname{tang} x, & \cot(\pi - x) &= -\cot x, \\ \sec(\pi - x) &= -\sec x, & \operatorname{cosec}(\pi - x) &= \operatorname{cosec} x, \end{aligned}$$

откуда слѣдуетъ, что *синусы и косекансы пополнительныхъ дугъ равны по абсолютной величинѣ и одинаковы по знаку, а косинусы, тангенсы, котангенсы и секансы такихъ дугъ равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку.*

Изъ двухъ предыдущихъ группъ равенствъ выводимъ непосредственно:

$$\sin[(2k+1)\pi \pm x] = \mp \sin x, \qquad \cos[(2k+1)\pi \pm x] = -\cos x,$$
$$\operatorname{tang}(k\pi \pm x) = \pm \operatorname{tang} x, \qquad \cot(k\pi \pm x) = \pm \cot x,$$
$$\sec[(2k+1)\pi \pm x] = -\sec x, \qquad \operatorname{cosec}[(2k+1)\pi \pm x] = \mp \operatorname{cosec} x,$$

при чемъ $k$ обозначаетъ положительное или отрицательное цѣлое число.

**§ 8.** Изъ изслѣдованія, произведеннаго въ **§ 6**-мъ, вытекаетъ, что синусъ и косинусъ измѣняются только въ предѣлахъ отъ $-1$ до $+1$; секансъ и косекансъ принимаютъ всевозможныя значенія между $+1$ и $+\infty$ и между $-1$ и $-\infty$; наконецъ, тангенсъ и котангенсъ принимаютъ всевозможныя значенія между $-\infty$ и $+\infty$.

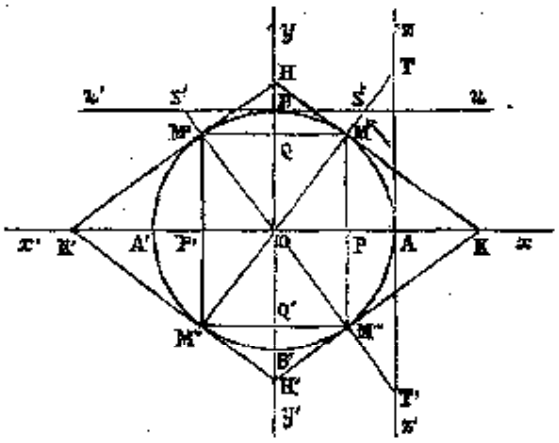
Весьма важно замѣтить, что каждая изъ тригонометрическихъ линій дуги $x$ принимаетъ всѣ тѣ значенія, какія она можетъ принять при неопредѣленномъ измѣненіи $x$, и тогда, когда $x$ измѣняется въ промежуткѣ только двухъ квадрантовъ. Такъ, напр., когда $x$ измѣняется отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, синусъ, тангенсъ, котангенсъ и косекансъ принимаютъ всѣ значенія, возможныя для этихъ тригонометрическихъ линій; а если $x$ измѣняется отъ 0 до $\pi$, то косинусъ, тангенсъ, котангенсъ и секансъ принимаютъ всѣ тѣ значенія, какія они могутъ принять. Наконецъ, если принимать во вниманіе только абсолютныя значенія, то всѣ шесть тригонометрическихъ линій примутъ всѣ, возможныя для нихъ, значенія при измѣненіи дуги отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, или отъ $\frac{\pi}{2}$ до $\pi$, или . . .

Часто бываетъ необходимо, когда задана дуга $x$, найти другую дугу между 0 и $\frac{\pi}{2}$ такую, которая, независимо отъ знаковъ, имѣла бы тѣ же тригонометрическія линіи, что и $x$. Для этого достаточно вычесть изъ $x$ наибольшее, какое можетъ въ немъ содержаться, цѣлое число полуокружностей, положительное или отрицательное, такимъ образомъ, чтобы положительный или отрицательный остатокъ $\pm\alpha$ по абсолютной величинѣ былъ бы меньше $\frac{\pi}{2}$. Дуга $\alpha$ будетъ имѣть, независимо отъ знаковъ, тѣ же тригонометрическія линіи, что и $x$.

*Дуги, соотвѣтствующія данной тригонометрической линіи.*

**§ 9.** Изъ предыдущихъ разсужденій вытекаетъ, что каждому значенію дуги между $-\infty$ и $+\infty$ соотвѣтствуетъ только одно опредѣленное значеніе для каждой изъ ея тригонометрическихъ линій, а одному и тому же данному значенію одной изъ тригонометрическихъ линій соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній дуги. Весьма важно умѣть опредѣлять всѣ дуги, соотвѣтствующія данной тригонометрической линіи, по одной изъ нихъ; сейчасъ мы дадимъ рѣшеніе этого вопроса. Пусть, какъ и прежде, $A$ есть начало дугъ; $y'y$—линія, на которой наносятся синусы и косекансы; $x'x$—линія, на которой наносятся косинусы и секансы; $z'z$ и $u'u$—линіи, на которыхъ наносятся соотвѣтственно тангенсы и котангенсы.

**Синусы и косекансы.**—Пусть $+OQ$ или $-OQ'$ есть данный синусъ (*черт.* 4); ведемъ черезъ точку $Q$ или $Q'$ параллельную $OA$; эта параллель пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ: $M$ и $M'$ или $M''$ и $M'''$. Очевидно, что всякая дуга, соотвѣтствующая данному синусу, будетъ оканчиваться въ одной изъ этихъ двухъ точекъ; обозначимъ черезъ $\alpha$ какую-нибудь одну изъ этихъ дугъ. Можно утверждать, что дуги $\alpha$ и $\pi-\alpha$ будутъ оканчиваться соотвѣтственно въ $M$ и $M'$ или въ $M''$ и $M'''$. Въ самомъ дѣлѣ, пред-




*Черт.* 4.

положимъ, напр., что $\alpha$ оканчивается въ $M$; чтобы описать дугу $\pi-\alpha$, идемъ сначала изъ $A$ въ $A'$ по дугѣ $ABA'$, послѣ чего намъ останется описать дугу $-\alpha$, а это приведетъ насъ въ точку $M'$, потому что мы останавливаемся въ точкѣ $M$, когда описы-

ваемъ дугу $+\alpha$, исходя изъ точки $A$. Итакъ, всякая дуга $x$, соотвѣтствующая данному синусу, имѣетъ общій конецъ съ одною изъ дугъ: $\alpha$ или $\pi-\alpha$; значитъ, принимая во вниманіе § 3, мы можемъ написать:

$$x=2k\pi+\alpha \text{ или } x=2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha,$$

гдѣ $k$ обозначаетъ какое-угодно цѣлое число, положительное, равное нулю или отрицательное.

Пусть, во вторыхъ, $+OH$ или $-OH'$ есть данный косекансъ; если изъ точекъ $H$ или $H'$ провести по двѣ касательныхъ къ окружности, то точки касанія: $M$ и $M'$ или $M''$ и $M'''$ будутъ концами дугъ, соотвѣтствующихъ данному косекансу. Поэтому, если обозначить черезъ $x$ и $\alpha$ какія-нибудь двѣ изъ этихъ дугъ, то получимъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ,

$$x=2k\pi+\alpha \text{ или } x=(2k+1)\pi-\alpha.$$

**Косинусы и секансы.**—Пусть $+OP$ или $-OP'$ есть данный косинусъ; ведемъ черезъ точку $P$ или $P'$ перпендикуляръ къ $OA$; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ: $M$ и $M'''$ или $M'$ и $M''$. Очевидно, что всякая дуга, соотвѣтствующая данному косинусу, будетъ оканчиваться въ одной изъ этихъ двухъ точекъ; обозначимъ черезъ $\alpha$ какую-нибудь одну изъ этихъ дугъ. Дуги $\alpha$ и $-\alpha$ будутъ оканчиваться въ $M$ и $M'''$ или въ $M'$ и $M''$; значитъ, всякая дуга $x$, соотвѣтствующая данному косинусу, будетъ имѣть общій конецъ съ одною изъ дугъ: $\alpha$ или $-\alpha$. Отсюда заключаемъ, что

$$x=2k\pi\pm\alpha,$$

гдѣ $k$ есть какое-угодно цѣлое число, положительное, равное нулю или отрицательное.

Пусть, во-вторыхъ, $+OK$ или $-OK'$ есть данный секансъ; если изъ точекъ $K$ и $K'$ провести по двѣ касательныхъ къ окружности, то точки касанія: $M$ и $M'''$ или $M'$ и $M''$ будутъ концами дугъ, соотвѣтствующихъ данному секансу. Поэтому, если обозначить черезъ $x$ и $\alpha$ какія-нибудь двѣ изъ этихъ дугъ, то получимъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ,

$$x=2k\pi\pm\alpha.$$

**Тангенсы и котангенсы.** — Пусть $+AT$ или $-AT'$ есть данный тангенсъ, а $+BS$ или $-BS'$ данный котангенсъ; ведемъ прямую черезъ центръ круга и черезъ конецъ даннаго тангенса или котангенса; эта прямая пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ: $M$ и $M''$ или $M'$ и $M'''$. Очевидно, что всякая дуга, соотвѣтствующая данному тангенсу или котангенсу, будетъ оканчиваться въ одной изъ этихъ двухъ точекъ; обозначимъ черезъ $\alpha$ какую-нибудь одну изъ этихъ дугъ. Дуги $\alpha$ и $\pi+\alpha$, очевидно, будутъ оканчиваться или въ $M$ и $M''$, или въ $M'$ и $M'''$; поэтому, всякая дуга $x$, соотвѣтствующая данному тангенсу или котангенсу, имѣетъ общій конецъ съ одною изъ дугъ: $\alpha$ или $\pi+\alpha$ и, слѣдовательно,

$$x=2k\pi+\alpha \text{ или } x=2k\pi+\pi+\alpha=(2k+1)\pi+\alpha,$$

или проще

$$x=k\pi+\alpha,$$

при чемъ $k$ обозначаетъ какое-угодно цѣлое число, положительное, равное нулю или отрицательное.

Все это приводитъ насъ къ слѣдующимъ слѣдствіямъ:

*Чтобы двѣ дуги имѣли одинъ и тотъ же синусъ или одинъ и тотъ же косекансъ, необходимо и достаточно, чтобы равнялась или ихъ сумма нечетному числу полуокружностей, или ихъ разность четному числу полуокружностей.*

*Чтобы двѣ дуги имѣли одинъ и тотъ же косинусъ или одинъ и тотъ же секансъ, необходимо и достаточно, чтобы ихъ сумма или ихъ разность равнялась цѣлому числу окружностей.*

*Чтобы двѣ дуги имѣли одинъ и тотъ же тангенсъ или одинъ и тотъ же котангенсъ, необходимо и достаточно, чтобы разность этихъ дугъ равнялась цѣлому числу полуокружностей.*

**§ 10.** Если положить

$$y=\sin x, \text{ или } y=\operatorname{tang} x, \text{ или } y=\sec x, \text{ или } \ldots,$$

то также пишутъ:

$$x=\operatorname{arc}\sin y, \text{ или } x=\operatorname{arc}\operatorname{tang} y, \text{ или } x=\operatorname{arc}\sec y, \text{ или } \ldots.$$

т.-е. $x=$ *дугѣ, синусъ которой есть* $y$, $x=$ *дугѣ, тангенсъ которой есть* $y$, ...; эти выраженія, $\operatorname{arc}\sin y$, ..., какъ видно изъ предыдущаго, являются не вполнѣ опредѣленными, потому что они до-

пускаютъ безчисленное множество значеній для каждаго значенія $y$ Четыре выраженія: $\arcsin y$, $\operatorname{arctang} y$, $\operatorname{arccot} y$, $\operatorname{arccosec} y$ будутъ вполнѣ опредѣлены, если условиться, что ихъ значенія постоянно остаются въ предѣлахъ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; равнымъ образомъ выраженія: $\arccos y$ и $\operatorname{arcsec} y$ будутъ опредѣлены, если условиться что ихъ значенія остаются постоянно въ предѣлахъ между 0 и $\pi$. При такомъ ограниченіи шесть выраженій:

$$\arcsin y,\ \operatorname{arctang} y,\ \operatorname{arcsec} y,\ \arccos y,\ \operatorname{arccot} y,\ \operatorname{arccosec} y$$

могутъ быть разсматриваемы, какъ функціи отъ $y$, что мы и видимъ въ высшихъ частяхъ математики; ихъ называютъ *обратными круговыми функціями*. Въ противоположность этимъ послѣднимъ тригонометрическія линіи называются часто *прямыми круговыми функціями*.

*Соотношенія между тригонометрическими линіями одной и той же дуги.*

§ 11. Между шестью тригонометрическими линіями одной и той же дуги существуетъ пять различныхъ соотношеній, которыя мы теперь и выведемъ.

Пусть $x$ (*черт.* 5) есть положительная или отрицательная дуга, конецъ которой $M$ лежитъ въ первомъ квадрантѣ $AB$; тогда

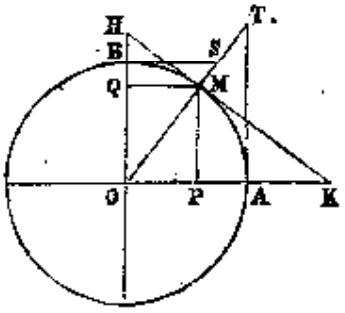
$$OM = 1,$$
$$\sin x = MP, \quad \operatorname{tang} x = AT, \quad \sec x = OK,$$
$$\cos x = OP, \quad \cot x = BS, \quad \operatorname{cosec} x = OH.$$

Изъ треугольника $OMP$ находимъ:

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2;$$

также прямоугольные треугольники $MOK$ и $MOH$ даютъ:

$$OK \cdot OP = \overline{OM}^2, \quad OH \cdot OQ = \overline{OM}^2;$$




*Черт.* 5.

наконецъ, изъ подобныхъ треугольниковъ: $TOA$ и $MOP$, $BOS$ и $MOQ$ выводимъ:

$$\frac{TA}{OA}=\frac{MP}{OP},\quad \frac{SB}{OB}=\frac{MQ}{OQ}.$$

Эти пять равенствъ могутъ быть написаны въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \tag{1}$$

$$\sec x\cdot\cos x=1, \tag{2}$$

$$\operatorname{cosec} x\cdot\sin x=1, \tag{3}$$

$$\operatorname{tang} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \tag{4}$$

$$\operatorname{cot} x=\frac{\cos x}{\sin x}. \tag{5}$$

Это и есть тѣ соотношенія, которыя мы желали получить. Изъ нихъ можно вывести нѣсколько другихъ, тоже важныхъ, соотношеній. Такъ, напр., изъ равенствъ (4) и (5) посредствомъ дѣленія получаемъ:

$$\operatorname{cot} x=\frac{1}{\operatorname{tang} x}; \tag{6}$$

также равенства (2) и (3) даютъ:

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}, \tag{7}$$

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}. \tag{8}$$

Эти новыя соотношенія показываютъ, что $\cot x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ соотвѣтственно обратны $\operatorname{tang} x$, $\cos x$ и $\sin x$.

Изъ равенствъ (4) и (5) выводимъ:

$$1+\operatorname{tang}^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1+\cot^2 x=1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x},$$

или, въ силу соотношеній (7) и (8),

$$\sec^2 x=1+\operatorname{tang}^2 x, \tag{9}$$

$$\operatorname{cosec}^2 x=1+\cot^2 x. \tag{10}$$

Эти два послѣднихъ равенства могутъ быть доказаны непосред-

ственно; въ самомъ дѣлѣ, прямоугольные треугольники $OTA$ и $OSB$ даютъ:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OK}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2, \quad \overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BS}^2,$$

а это и есть не что иное, какъ соотношенія (9) и (10).

**§ 12.** Чтобы вывести формулы: (1), (2), (3), (4) и (5), мы предположили, что конецъ дуги $x$ находится въ первомъ квадрантѣ, но не трудно замѣтить, что эти формулы справедливы и въ общемъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было положеніе конца $M$ на окружности, непремѣнно найдется (**§ 8**) нѣкоторая дуга между 0 и $\frac{\pi}{2}$, которая будетъ имѣть, независимо отъ знаковъ, тѣ же тригонометрическія линіи, что и $x$; отсюда слѣдуетъ, что соотношенія: (1), (2), (3), (4) и (5) всегда справедливы для абсолютныхъ значеній тригонометрическихъ линій. Далѣе, соотношеніе (1), содержащее только квадраты $\sin x$ и $\cos x$, будетъ справедливо во всѣхъ случаяхъ; остается показать, что обѣ части каждаго изъ равенствъ: (2), (3), (4) и (5) всегда имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Мы видѣли:

1) Что $\cos x$ и $\sec x$ оба положительны, если конецъ дуги $x$ находится въ первомъ или въ четвертомъ квадрантѣ, и оба отрицательны въ двухъ другихъ случаяхъ;

2) Что $\sin x$ и $\operatorname{cosec} x$ оба положительны, если конецъ дуги $x$ находится въ первомъ или во второмъ квадрантѣ, и оба отрицательны въ двухъ другихъ случаяхъ;

3) Что $\operatorname{tang} x$ и $\operatorname{cot} x$ оба положительны, если конецъ дуги $x$ находится въ первомъ или третьемъ квадрантѣ (въ этихъ случаяхъ $\sin x$ и $\cos x$ или оба заразъ положительны или оба заразъ отрицательны); тѣ же тригонометрическія линіи обѣ отрицательны, если конецъ дуги $x$ находится во второмъ или въ четвертомъ квадрантѣ (въ этихъ случаяхъ $\sin x$ и $\cos x$ противоположны по знаку).

На основаніи этихъ замѣчаній и на основаніи правила умноженія положительныхъ и отрицательныхъ количествъ заключаемъ, что обѣ части каждаго изъ соотношеній: (2), (3), (4) и (5) всегда одного знака. Слѣдовательно, эти формулы справедливы для всѣхъ значеній $x$.

**§ 13.** Изъ соотношеній: (1), (2), (3), (4) и (5) можно вывести значенія какихъ-угодно пяти изъ шести тригонометрическихъ линій *въ функціи* отъ шестой; такъ, напр.,

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}, \quad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},$$

$$\cot x = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

При этомъ всегда нужно помнить, что если извѣстна какая-нибудь одна тригонометрическая линія дуги $x$, то не всѣ остальныя линіи опредѣляются вполнѣ. Такъ, напр., если данъ $\sin x$, то значеніе $\operatorname{cosec} x$ является вполнѣ опредѣленнымъ; для четырехъ же другихъ линій могутъ быть опредѣлены только ихъ абсолютныя значенія. Другими словами, изъ дугъ, синусъ которыхъ данъ, однѣ будутъ такія, для которыхъ косинусъ, тангенсъ, котангенсъ и секансъ положительны, а другія—такія, для которыхъ тѣ же линіи—отрицательны.

Часто бываетъ необходимо знать $\sin x$ и $\cos x$ по $\operatorname{tang} x$; предположимъ, что данное значеніе $\operatorname{tang} x$ имѣетъ видъ дроби $\frac{m}{n}$; пишемъ:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{m}{n},$$

откуда

$$\sin x = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \cos x = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

въ этихъ формулахъ радикалъ $\sqrt{m^2+n^2}$ долженъ быть взятъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, но самый знакъ является неопредѣленнымъ.

Такъ какъ дуга $\frac{\pi}{4}$ равна своему дополненію, то $\cos\frac{\pi}{4}$ равенъ $\sin\frac{\pi}{4}$, а слѣдовательно,

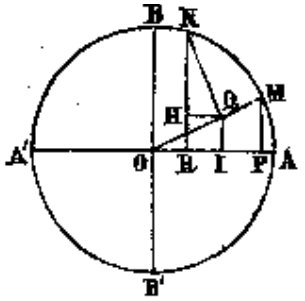
$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1;$$

далѣе, по предыдущему, находимъ:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Формулы, относящіяся къ сложенію дугъ.*

**§ 14. Синусъ и косинусъ.**—Постараемся опредѣлить синусъ и косинусъ суммы двухъ дугъ, зная синусъ и косинусъ этихъ дугъ. Обозначимъ черезъ $a$ и $b$ двѣ положительныхъ дуги, сумма которыхъ не превышаетъ $\frac{\pi}{2}$. Пусть (*черт.* 6) $A$ есть начало дугъ; отложимъ $AM=a$ и $MN=b$; $M$ можно принять за начало дуги $b$,




*Черт.* 6.

а $N$—за конецъ ея; въ такомъ случаѣ

$$a+b=AN.$$

Ведемъ: $NQ$ перпендикулярно къ радіусу $OM$; $NR$, $QI$, $MP$ перпендикулярно къ $OA$ и $QH$ параллельно $OA$; получаемъ:

$$\sin a=MP,\ \cos a=OP,$$
$$\sin b=NQ,\ \cos b=OQ,$$
$$\sin(a+b)=NR=QI+NH.$$
$$\cos(a+b)=OR=OI-QH.$$

Разсматриваемъ теперь подобные треугольники $MPO$ и $QIO$; они даютъ:

$$\frac{QI}{MP}=\frac{OI}{OP}=\frac{OQ}{OM},$$

откуда

$$QI=\frac{MP.OQ}{OM}=\sin a\cos b,\ OI=\frac{OP.OQ}{OM}=\cos a\cos b.$$

Треугольники $MPO$ и $NQH$ также подобны, потому что стороны ихъ взаимно перпендикулярны; слѣдовательно,

$$\frac{NH}{OP}=\frac{QH}{MP}=\frac{NQ}{OM}$$

откуда

$$NH = \frac{OP.NQ}{OM} = \cos a \sin b, \quad QH = \frac{MP.NQ}{OM} = \sin a \sin b.$$

Итакъ,

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \tag{1}$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \tag{2}$$

**§ 15.** Эти формулы, (1) и (2), доказаны только при томъ предположеніи, что $a$ и $b$—положительны и что сумма ихъ не превосходитъ $\frac{\pi}{2}$; покажемъ, что онѣ справедливы для двухъ какихъ-угодно дугъ $a$ и $b$.

1. *Формулы* (1) *и* (2) *справедливы для всякихъ значеній* $a$ *и* $b$ *между* $0$ *и* $\frac{\pi}{2}$.

Зная, что эти формулы справедливы для случая $a + b \leqslant \frac{\pi}{2}$, предположимъ теперь, что $a + b > \frac{\pi}{2}$. Пусть $a'$ и $b'$ будутъ дополненіями $a$ и $b$; тогда $a' + b' < \frac{\pi}{2}$ и, слѣдовательно,

$$\sin (a' + b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos (a' + b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'.$$

Такъ какъ синусы двухъ пополнительныхъ дугъ равны, а косинусы равны, но противоположны по знаку, то, замѣняя $a'$, $b'$ и $a' + b'$ ихъ значеніями $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$ и $\pi - (a + b)$, получимъ какъ разъ трабуемыя формулы (1) и (2).

2. *Если формулы* (1) *и* (2) *справедливы для двухъ дугъ* $a$ *и* $b$, *то онѣ останутся справедливыми и тогда, когда къ одной изъ нихъ прибавитъ* $\frac{\pi}{2}$.

По предположенію, дуги $a$ и $b$ удовлетворяютъ формуламъ (1) и (2); полагаемъ $a' = a + \frac{\pi}{2}$ и замѣняемъ $a$ на $a' - \frac{\pi}{2}$; находимъ:

$$\sin\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\cos b + \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\sin b,$$
$$\cos\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\cos b - \sin\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\sin b;$$

зная же, что при всякомъ $x$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x,$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,$$

мы предыдущія формулы можемъ переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos(a'+b)=\cos a'\cos b-\sin a'\sin b,$$
$$\sin(a'+b)=\sin a'\cos b+\cos a'\sin b.$$

Отсюда видно, что формулы (1) и (2) остаются справедливыми и тогда, когда $a$ замѣняемъ въ нихъ на $a'$, или, что одно и то же, на $a+\frac{\pi}{2}$.

3. *Формулы* (1) и (2) *справедливы для всевозможныхъ положительныхъ значеній* $a$ и $b$.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что положительныя дуги $a$ и $b$ содержатъ соотвѣтственно, первая $m$, а вторая $n$ квадрантовъ, и пусть

$$a=m\frac{\pi}{2}+a',\ b=n\cdot\frac{\pi}{2}+b',$$

гдѣ дуги $a'$ и $b'$, каждая въ отдѣльности, меньше одного квадранта; пишемъ:

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\cos a'\sin b',$$
$$\cos(a'+b')=\cos b'\cos a'-\sin a'\sin b'.$$

А такъ какъ по предыдущему эти формулы останутся справедливыми и тогда, когда мы прибавимъ послѣдовательно $m$ разъ $\frac{\pi}{2}$ къ $a'$ и $n$ разъ $\frac{\pi}{2}$ къ $b'$, то формулы (1) и (2) приложимы, поэтому, и къ двумъ какимъ-угодно положительнымъ дугамъ $a$ и $b$.

4. *Формулы* (1) *и* (2) *справедливы для всевозможныхъ значеній* $a$ *и* $b$.

Это предложеніе доказано для случая, когда обѣ дуги $a$ и $b$ положительны; предположимъ теперь, что, по крайней мѣрѣ, одна изъ этихъ дугъ отрицательна, и пусть $k$ обозначаетъ достаточно большое цѣлое число, при которомъ $2k\pi+a=a'$ и $2k\pi+b=b'$ были бы положительными; въ такомъ случаѣ

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\cos a'\sin b',$$
$$\cos(a'+b')=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b'.$$

Замѣняя же $a'$ черезъ $2k\pi+a$, $b'$ черезъ $2k\pi+b$ и припоминая, что при всякомъ $x$

$$\sin(2k\pi+x)=\sin x, \quad \cos(2k\pi+x)=\cos x,$$

получимъ формулы (1) и (2).

Итакъ, общность формулъ (1) и (2) доказана вполнѣ; слѣдуетъ замѣтить, что каждая изъ этихъ формулъ можетъ быть выведена изъ другой посредствомъ замѣны $a$ на $a+\frac{\pi}{2}$, или $b$ на $b+\frac{\pi}{2}$.

Измѣняя въ формулахъ (1) и (2) $b$ на $-b$, находимъ:

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b, \qquad (3)$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b. \qquad (4)$$

**§ 16.** Не трудно вывести, на основаніи предыдущаго, синусъ и косинусъ суммы какого-угодно числа дугъ по синусамъ и косинусамъ этихъ дугъ. Пусть, напр., $a$, $b$ и $c$ обозначаютъ три какихъ-нибудь дуги; пишемъ:

$$\sin(a+b+c)=\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c,$$
$$\cos(a+b+c)=\cos(a+b)\cos c-\sin(a+b)\sin c;$$

далѣе, развертывая $\sin(a+b)$ и $\cos(a+b)$, получаемъ:

$$\sin(a+b+c)=\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c$$
$$+\sin c\cos a\cos b-\sin a\sin b\sin c,$$
$$\cos(a+b+c)=\cos a\cos b\cos c-\cos a\sin b\sin c$$
$$-\cos b\sin a\sin c-\cos c\sin a\sin b.$$

Опредѣливъ такимъ образомъ синусъ и косинусъ суммы трехъ дугъ, мы можемъ составить формулы для синуса и косинуса суммы четырехъ дугъ, и т. д.

**§ 17. Тангенсы и котангенсы.** — Выведемъ теперь формулы для тангенса и котангенса суммы двухъ дугъ соотвѣтственно по тангенсамъ или котангенсамъ этихъ дугъ.

Пусть $a$ и $b$ будутъ двѣ какія-нибудь дуги, положительныя или отрицательныя; пишемъ:

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b};$$

дѣля числитель и знаменатель этой дроби на $\cos a \cos b$, находимъ:

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}. \qquad (5)$$

Измѣняя же въ этой формулѣ $b$ на $-b$, получимъ:

$$\operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}. \qquad (6)$$

Чтобы имѣть $\cot(a+b)$ въ функціи отъ $\cot a$ и $\cot b$, достаточно припомнить, что котангенсъ какой-нибудь дуги есть обратная функція отъ тангенса той же дуги; равенства (5) и (6) въ такомъ случаѣ перепишутся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}, \quad \cot(a-b) = \frac{1 + \cot a \cot b}{\cot b - \cot a}.$$

На основаніи выведенной формулы для $\operatorname{tang}(a+b)$ не трудно получить тангенсъ суммы какого-угодно числа дугъ въ функціи отъ тангенсовъ этихъ дугъ. Пусть, напр., $a$, $b$, $c$ обозначаютъ три какія-нибудь дуги; напишемъ равенство:

$$\operatorname{tang}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang}(a+b) + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang}(a+b) \operatorname{tang} c},$$

замѣняя же $\operatorname{tang}(a+b)$ его значеніемъ $\frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$, находимъ:

$$\operatorname{tang}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}.$$

Опредѣливъ такимъ образомъ тангенсъ суммы трехъ дугъ, можно вывести тангенсъ суммы четырехъ дугъ, и т. д.

*Нѣкоторыя важныя формулы, выводимыя изъ формулъ, относящихся къ сложенію дугъ.*

**§ 18.** Формулы:

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b, \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b
\end{aligned}$$

дают:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,\\
&\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a\sin b,\\
&\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,\\
&\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть теперь

$$a+b=p,\quad a-b=q;$$

тогда

$$a=\tfrac{1}{2}(p+q),\quad b=\tfrac{1}{2}(p-q),$$

и предыдущія формулы примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin p+\sin q=2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),\\
&\sin p-\sin q=2\sin\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q),\\
&\cos p+\cos q=2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),\\
&\cos q-\cos p=2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Послѣдними формулами пользуются очень часто; посредствомъ ихъ сумма или разность двухъ синусовъ или двухъ косинусовъ преобразовывается въ произведеніе синусовъ или косинусовъ.

Также можно выразить посредствомъ произведенія сумму или разность синуса и косинуса. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\cos p\pm\sin q=\sin\left(\frac{\pi}{2}-p\right)\pm\sin q;$$

примѣняя же формулы (2), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos p+\sin q=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right),\\
&\cos p-\sin q=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Дѣля по-членно формулы (2) одну на другую, находимъ рядъ еще слѣдующихъ важныхъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)},\\
\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p+q),\\
\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \cot\tfrac{1}{2}(p-q),\\
\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-q),\\
\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)} = \cot\tfrac{1}{2}(p+q),\\
\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)}\\
&= \cot\tfrac{1}{2}(p+q)\cot\tfrac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

**§ 19.** Также можно преобразовать сумму или разность двухъ тангенсовъ въ произведеніе тригонометрическихъ линій. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b},$$

или

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}; \quad (5)$$

подобнымъ же образомъ

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b}, \quad (6)$$

$$\cot a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\cos(a \mp b)}{\sin a \cos b}. \quad (7)$$

Вотъ еще одна формула, которую слѣдуетъ замѣтить. Перемножаемъ по-членно два равенства:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b;$$

получаемъ:

$$\begin{aligned}
\sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b\\
&= (1-\sin^2 b)\sin^2 a - (1-\sin^2 a)\sin^2 b\\
&= (1-\cos^2 a)\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cos^2 a,
\end{aligned}$$

или, что одно и то же,

$$\left.\begin{aligned}
\sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a - \sin^2 b\\
&= \cos^2 b - \cos^2 a.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

**§ 20. Сумма косинусовъ или синусовъ ряда дугъ, расположенныхъ въ ариѳметической прогрессіи.**—Дано $n$ дугъ:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h.$$

Пусть $i$ обозначаетъ какое-угодно цѣлое число; по § 18-му

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+ih)=\sin\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right).$$

Придавая $i$ послѣдовательно значенія : 0, 1, 2, . . . , $(n-1)$, находимъ:

$$2\sin\frac{h}{2}\cos a=\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right),$$

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+h)=\sin\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{h}{2}\right),$$

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+2h)=\sin\left(a+\frac{5h}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{3h}{2}\right),$$

. . . . . .

$$2\sin\frac{h}{2}\cos[a+(n-1)h]=\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2n-3}{2}h\right).$$

Эти равенства складываемъ по-членно и дѣлаемъ приведеніе:

$$2\sin\frac{h}{2}[\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=$$
$$=\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right),$$

откуда

$$\cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=$$
$$=\frac{\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}};$$

наконецъ, преобразовывая числитель послѣдняго выраженія по одной изъ формулъ § 18-го въ произведеніе, получаемъ:

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=$$
$$=\frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Если въ этой формулѣ измѣнить $a$ въ $\frac{\pi}{2} - a$ и $h$ въ $-h$, то будетъ:

$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Двѣ послѣднія формулы даютъ весьма простыя выраженія для суммы косинусовъ и для суммы синусовъ $n$ дугъ, расположенныхъ въ ариѳметической прогрессіи.

*Умноженіе дугъ.*

**§ 21. Выраженія** $\sin 2a$ **и** $\cos 2a$ **въ функціи отъ** $\sin a$ **или отъ** $\cos a$.— Если въ формулахъ:

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b,\\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

положить $b = a$, то будетъ:

$$\left.\begin{aligned}\sin 2a &= 2\sin a\cos a,\\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Эти формулы (2) даютъ возможность опредѣлить значенія $\sin 2a$ и $\cos 2a$ въ функціи отъ $\sin a$ и отъ $\cos a$. Желая выразить эти значенія въ функціи только отъ $\sin a$ или только отъ $\cos a$, мы должны замѣнить $\cos a$ черезъ $\sqrt{1-\sin^2 a}$ или $\sin a$ черезъ $\sqrt{1-\cos^2 a}$; такимъ образомъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sin 2a &= \pm 2\sin a\sqrt{1-\sin^2 a} = \pm 2\cos a\sqrt{1-\cos^2 a},\\ \cos 2a &= 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Важно замѣтить, что $\cos 2a$ выражается раціонально въ функціи отъ $\cos a$ или отъ $\sin a$, тогда какъ $\sin 2a$ есть ирраціональная функція отъ $\sin a$ или отъ $\cos a$. Отсюда вытекаетъ, что если извѣстно значеніе $\sin a$ или $\cos a$, то $\cos 2a$ является вполнѣ опредѣленнымъ; что же касается $\sin 2a$, то вполнѣ опредѣленнымъ будетъ только его абсолютная величина. Покажемъ, отъ чего это происходитъ.

Задаемъ сначала значеніе $\sin a$ и полагаемъ

$$\sin a = b.$$

Дуга $a$ будетъ имѣть безчисленное множество значеній, опредѣляемыхъ (§ 9) по формуламъ:

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

гдѣ $\alpha$ обозначаетъ одну опредѣленную дугу изъ всѣхъ, синусъ которыхъ равенъ $b$; поэтому, значенія $\sin 2a$ найдутся по формуламъ:

$$\sin 2a = \sin(4k\pi + 2\alpha) = \sin 2\alpha,$$
$$\sin 2a = \sin(4k\pi + 2\pi - 2\alpha) = -\sin 2\alpha,$$

а $\cos 2a$ — по формуламъ:

$$\cos 2a = \cos(4k\pi + 2\alpha) = \cos 2\alpha,$$
$$\cos 2a = \cos(4k\pi + 2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

Отсюда видно, что $\sin 2a$ можетъ принять двоякое значеніе $\pm\sin 2\alpha$, тогда какъ $\cos 2a$ принимаетъ только одно значеніе $\cos 2\alpha$.

Тѣ же разсужденія справедливы и тогда, когда дано $\cos a$. Пусть

$$\cos a = b;$$

обозначимъ черезъ $\alpha$ одну опредѣленную дугу изъ всѣхъ, косинусъ которыхъ равенъ $b$; значенія $a$ опредѣлятся по формулѣ:

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

и, слѣдовательно, значенія $\sin 2a$ и $\cos 2a$ будутъ слѣдующія:

$$\sin 2a = \sin(4k\pi \pm 2\alpha) = \pm\sin 2\alpha,$$
$$\cos 2a = \cos(4k\pi \pm 2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

Итакъ, $\sin 2a$ имѣетъ два равныхъ, но противоположныхъ по знаку, значенія, тогда какъ $\cos 2a$ имѣетъ только одно.

**§ 22. Выраженія $\sin 3a$ и $\cos 3a$ въ функціи отъ $\sin a$ или $\cos a$.** — Если въ формулахъ (1) положить $b = 2a$, то получимъ:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a;$$

эти формулы послѣ замѣны въ нихъ $\sin 2a$ и $\cos 2a$ ихъ значеніями изъ уравненій (2) перейдутъ въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}\sin 3a &= 3\sin a\cos^2 a - \sin^3 a,\\ \cos 3a &= \cos^3 a - 3\sin^2 a\cos a,\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

выражающія $\sin 3a$ и $\cos 3a$ въ функціи отъ $\sin a$ и $\cos a$. Замѣняя въ первой изъ нихъ $\cos^2 a$ его значеніемъ $1-\sin^2 a$, а во второй $\sin^2 a$ его значеніемъ $1-\cos^2 a$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sin 3a &= 3\sin a - 4\sin^3 a,\\ \cos 3a &= 4\cos^3 a - 3\cos a.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Эти формулы показываютъ, что $\sin 3a$ и $\cos 3a$ выражаются раціонально, первый въ функціи отъ $\sin a$, а второй въ функціи отъ $\cos a$; напротивъ, $\sin 3a$ есть ирраціональная функція отъ $\cos a$, а $\cos 3a$—ирраціональная функція отъ $\sin a$. Отсюда вытекаетъ, что когда данъ $\sin a$, то $\sin 3a$ опредѣленъ вполнѣ, а $\cos 3a$ является опредѣленнымъ только по абсолютной величинѣ; наоборотъ, когда данъ $\cos a$, то $\cos 3a$ опредѣленъ, а $\sin 3a$ нѣтъ. Можно показать посредствомъ такихъ же разсужденій, какъ и въ **§ 21**-мъ, что это такъ и должно быть.

**§ 23.** Зная значенія $\sin(m-1)a$ и $\cos(m-1)a$ въ функціи отъ $\sin a$ и $\cos a$, мы найдемъ значенія $\sin ma$ и $\cos ma$, полагая $b=(m-1)a$ въ равенствахъ (1), которыя перейдутъ въ такомъ случаѣ въ слѣдующія:

$$\begin{aligned}\sin ma &= \sin a\cos(m-1)a + \cos a\sin(m-1)a,\\ \cos ma &= \cos a\cos(m-1)a - \sin a\sin(m-1)a,\end{aligned}$$

и замѣняя въ послѣднихъ $\sin(m-1)a$ и $\cos(m-1)a$ ихъ извѣстными значеніями. Понятно, какимъ образомъ можно вычислить постепенно по этому методу значенія $\sin 4a$ и $\cos 4a$, $\sin 5a$ и $\cos 5a$ въ функціи отъ $\sin a$ и $\cos a$. Мы не станемъ производить дальнѣйшихъ выкладокъ, а дадимъ впослѣдствіи [1]) общій методъ, по которому составляются непосредственно значенія $\sin ma$ и $\cos ma$, каково бы ни было цѣлое число $m$.

---

[1]) См. **Серре** (J.-A.). *Дополненіе къ „Теоріи круговыхъ функцій“*. Пер. М. В. Пирожкова. Спб. 1902 г.

**§ 24. Выраженія $\operatorname{tang} 2a$ и $\operatorname{tang} 3a$ въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$.** — Если въ формулѣ:

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \tag{6}$$

положить $b = a$, то получится формула:

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2\operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a}, \tag{7}$$

выражающая $\operatorname{tang} 2a$ въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$.

Если въ формулѣ (6) положить $b = 2a$, то получится формула:

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} 2a}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} 2a},$$

которая послѣ замѣны въ ней $\operatorname{tang} 2a$ его значеніемъ изъ формулы (7) перейдетъ въ слѣдующую:

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3\operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3\operatorname{tang}^2 a}.$$

Вообще, если извѣстно значеніе $\operatorname{tang}(m-1)a$ въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$, то $\operatorname{tang} ma$ выразится формулою:

$$\operatorname{tang} ma = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang}(m-1)a}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang}(m-1)a}.$$

Итакъ, можно вычислить послѣдовательно значенія $\operatorname{tang} 4a$, $\operatorname{tang} 5a$, . . . , которыя всѣ выразятся раціонально въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$. Впослѣдствіи [1]) мы дадимъ общее выраженіе $\operatorname{tang} ma$ въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$.

Выраженіе $\cot ma$ въ функціи отъ $\cot a$ выводится непосредственно изъ выраженія $\operatorname{tang} ma$ въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$; напр., замѣняя въ формулѣ (7) $\operatorname{tang} a$ и $\operatorname{tang} 2a$ соотвѣтственно черезъ $\frac{1}{\cot a}$ и $\frac{1}{\cot 2a}$, находимъ:

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}.$$

---

[1]) См. Серре (J.-A.). *Дополненіе къ „Теоріи круговыхъ функцій"*. Пер. М. В. Пирожкова. Спб. 1902 г.

*Дѣленіе дугъ.*

**§ 25. Выраженія** $\sin\frac{1}{2}a$ **и** $\cos\frac{1}{2}a$ **въ функціи отъ** $\cos a$. — Напишемъ (**§ 21**):

$$\cos^2\frac{1}{2}a - \sin^2\frac{1}{2}a = \cos a,$$

$$\cos^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}a = 1;$$

**изъ этихъ равенствъ опредѣляемъ:**

$$\cos^2\frac{1}{2}a = \frac{1+\cos a}{2}, \quad \sin^2\frac{1}{2}a = \frac{1-\cos a}{2},$$

**откуда**

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}, \quad \sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что для $\cos\frac{1}{2}$ и $\sin\frac{1}{2}a$ вполнѣ опредѣленными являются ихъ абсолютныя величины, а знаки нѣтъ. Такой результатъ можно оправдать тѣми же соображеніями, какими мы пользовались въ **§ 21**-мъ. Пусть $b$ есть данное значеніе $\cos a$ и $\alpha$—одна опредѣленная дуга изъ всѣхъ, косинусы которыхъ равны $b$; значенія $a$, для которыхъ $\cos a = b$, опредѣляются по формулѣ:

$$a = 2k\pi \pm \alpha;$$

слѣдовательно, значенія $\cos\frac{1}{2}a$ и $\sin\frac{1}{2}a$ будутъ:

$$\cos\frac{1}{2}a = \cos\left(k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha\right), \quad \sin\frac{1}{2}a = \sin\left(k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha\right).$$

При $k$ четномъ эти формулы обратятся въ слѣдующія:

$$\cos\frac{1}{2}a = \cos\frac{1}{2}\alpha, \quad \sin\frac{1}{2}a = \pm\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

**а при** $k$ **нечетномъ въ**

$$\cos\frac{1}{2}a = -\cos\frac{1}{2}\alpha, \quad \sin\frac{1}{2}a = \mp\sin\frac{1}{2}\alpha;$$

отсюда видно, что какъ $\cos\frac{1}{2}a$ можетъ принять двоякое значеніе $\pm\cos\frac{1}{2}a$, такъ и $\sin\frac{1}{2}a$ — двоякое значеніе $\pm\sin\frac{1}{2}a$.

Когда дуга $a$ дана, то знаки при $\sin\frac{1}{2}a$ и при $\cos\frac{1}{2}a$ являются извѣстными, и эти количества можно будетъ вычислять по формуламъ (1). Такъ, напр., зная, что косинусъ дуги $\frac{\pi}{4}$ равенъ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (§ 13), мы по формуламъ (1) получимъ синусъ и косинусъ дуги $\frac{\pi}{8}$, именно:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

**§ 26. Выраженія $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$ въ функціи отъ $\sin a$.**—Подставляя въ формулы (1) вмѣсто $\cos a$ его значеніе $\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$, находимъ:

$$\cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-\sin^2 a}}{2}},$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-\sin^2 a}}{2}};$$

впрочемъ, можно получить болѣе простыя выраженія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ:

$$2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a=\sin a,\quad \cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}a=1$$

посредствомъ сложенія и вычитанія выводимъ:

$$\left(\cos\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}a\right)^2=1+\sin a,$$

$$\left(\cos\frac{1}{2}a-\sin\frac{1}{2}a\right)^2=1-\sin a,$$

откуда

$$\cos\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{1+\sin a},$$

$$\cos\frac{1}{2}a-\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{1-\sin a},$$

и, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}a &= \pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}\right),\\ \sin\tfrac{1}{2}a &= \pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Въ этихъ двухъ формулахъ берутся заразъ верхніе или заразъ нижніе знаня какъ внѣ скобокъ, такъ и внутри скобокъ, но въ каждой изъ нихъ въ отдѣльности знакъ передъ скобками не зависитъ отъ знака въ скобкахъ. Такимъ образомъ получается по четыре значенія какъ для $\cos\frac{1}{2}a$, такъ и для $\sin\frac{1}{2}a$; замѣчательно, что всѣ значенія для $\cos\frac{1}{2}a$ будутъ также значеніями и для $\sin\frac{1}{2}a$. Чтобы разъяснить такой результатъ, назовемъ черезъ $b$ данное значеніе $\sin a$ и черезъ $\alpha$ одну опредѣленную дугу изъ всѣхъ, синусъ которыхъ равенъ $b$; такъ какъ значенія $a$ выразятся формулами:

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

то значенія для $\cos\frac{1}{2}a$ и $\sin\frac{1}{2}a$ будутъ:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\left(k\pi + \tfrac{1}{2}\alpha\right), \quad \cos\tfrac{1}{2}a = \cos\left(k\pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\left(k\pi + \tfrac{1}{2}\alpha\right), \quad \sin\tfrac{1}{2}a = \sin\left(k\pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right).$$

При $k$ четномъ эти формулы даютъ:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos\tfrac{1}{2}a = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}a = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

а при $k$ нечетномъ:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = -\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos\tfrac{1}{2}a = -\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = -\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a = -\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}a = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = -\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Отсюда видно, что $\cos\frac{1}{2}a$ и $\sin\frac{1}{2}a$, каждый въ отдѣльности, имѣютъ четыре значенія: $\pm\cos\frac{1}{2}a$, $\pm\sin\frac{1}{2}a$.

Когда дуга $a$ дана, то знаки при $\sin\frac{1}{2}a$ и при $\cos\frac{1}{2}a$ являются извѣстными; кромѣ того, мы можемъ сказать, какая изъ двухъ функцій имѣетъ бо́льшую абсолютную величину. Это замѣчаніе даетъ возможность опредѣлить въ каждомъ случаѣ тѣ знаки, какіе нужно выбирать въ формулахъ (2), чтобы получить значенія для $\cos\frac{1}{2}a$ и для $\sin\frac{1}{2}a$.

**§ 27. Выраженіе $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ въ функціи отъ $\operatorname{tang}a$.**—Замѣняя въ формулѣ:

$$\operatorname{tang}2a = \frac{2\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}^2 a}$$

$a$ черезъ $\frac{1}{2}a$, находимъ:

$$\operatorname{tang}a = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a};$$

полагая же

$$\operatorname{tang}a = b, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}a = x,$$

получаемъ уравненіе:

$$x^2 + \frac{2}{b}x - 1 = 0, \tag{3}$$

откуда

$$x = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{b^2}+1}. \tag{4}$$

Выяснимъ, что́ представляютъ эти два корня уравненія (3). Пусть $\alpha$ будетъ одна опредѣленная дуга изъ всѣхъ, тангенсъ которыхъ равенъ $b$; значенія $a$ опредѣлятся по формулѣ:

$$a = k\pi + \alpha,$$

и, слѣдовательно, значенія $x$ по формулѣ:

$$x = \operatorname{tang}\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right).$$

При четномъ значеніи $k$, равномъ $2n$, эта формула даетъ:

$$x = \operatorname{tang}\left(n\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha,$$

при нечетномъ же значеніи $k$, равномъ $2n+1$, она даетъ:

$$x = \operatorname{tang}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\cot\frac{1}{2}\alpha;$$

отсюда слѣдуетъ, что $x$ имѣетъ два значенія, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$ и $-\cot\frac{1}{2}\alpha$, произведеніе которыхъ равно $-1$.

Когда дуга $a$ дана, то не трудно опредѣлить, какой изъ двухъ корней уравненія (3) равенъ $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$, потому что мы будемъ знать напередъ, каковъ знакъ при этомъ тангенсѣ. Пусть, напр., дано, что $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1$ и требуется найти $\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}$; зная, что $\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}$ положителенъ, и полагая $b = 1$ въ формулѣ (4), находимъ:

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}.$$

**§ 28.** Можно выразить $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ въ функціи отъ $\sin a$ и $\cos a$ посредствомъ другихъ, весьма часто употребляемыхъ, формулъ. Пишемъ:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\cos^2\frac{1}{2}a} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a};$$

примѣняя предыдущія формулы (§§ 21 и 25), получаемъ:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

Замѣняя $\sin a$ его значеніемъ $\sqrt{1-\cos^2 a}$, находимъ еще формулу:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

**§ 29. Уравненіе, изъ котораго опредѣляется $\cos\frac{a}{3}$, когда данъ $\cos a$.—** Если въ формулѣ:

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

подставить $\frac{a}{3}$ вмѣсто $a$, то будетъ:

$$\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3};$$

полагая же

$$\cos a = b, \quad \cos\frac{a}{3} = x,$$

напишемъ:

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0.$$

Составленное уравненіе—третьей степени и изъ Алгебры мы знаемъ, что оно имѣетъ три вещественныхъ корня. Доказать это можно слѣдующимъ образомъ. Если $\alpha$ есть одна опредѣленная дуга изъ всѣхъ, косинусъ которыхъ равенъ $b$, то значенія $a$ опредѣляются по формулѣ:

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

и, слѣдовательно, значенія $x$ будутъ:

$$x = \cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

гдѣ $k$ должно придавать всевозможныя цѣлыя значенія, положительныя, равныя нулю или отрицательныя. Но, каково бы ни было $k$, можно всегда написать:

$$k = 3n + i,$$

гдѣ $i$ есть одно изъ чиселъ : 0, 1 или 2; слѣдоватольно,

$$x = \cos\left(2n\pi + \frac{2i\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2i\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right);$$

припоминая же (§ 9), что дуги:

$$-\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$$

имѣютъ соотвѣтственно таніе же косинусы, какъ и дуги:

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3},$$

заключаемъ, что $x$ имѣетъ три различныхъ значенія:

$$\cos\frac{\alpha}{3},\quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$$

и другихъ имѣть не можетъ.

**§ 30. Уравненіе, изъ котораго опредѣляется** $\sin\frac{a}{3}$, **когда данъ** $\sin a$.— Если въ формулѣ:

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

подставить $\frac{a}{3}$ вмѣсто $a$, то получится:

$$\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3};$$

полагая же

$$\sin a = b,\quad \sin\frac{a}{3} = x,$$

будемъ имѣть уравненіе:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0,$$

при чемъ замѣчаемъ, что оно выводится изъ уравненія **§ 29**-го посредствомъ измѣненія $b$ на $-b$.

Выяснимъ теперь, что представляютъ три корня этого уравненія. Пусть $\alpha$ обозначаетъ одну опредѣленную дугу изъ всѣхъ, синусъ которыхъ равенъ $b$; тогда значенія $a$ опредѣлятся по формуламъ:

$$a = 2k\pi + \alpha,\quad a = (2k+1)\pi - \alpha$$

и, слѣдовательно, значенія $x$ будутъ:

$$x = \sin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad x = \sin\left(\frac{2k+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Полагая $k=3n+i$, гдѣ $i$ можетъ принять одно изъ значеній : 0,1,2, мы послѣднія формулы перепишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$x = \sin\left(2n\pi + \frac{2i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sin\left(\frac{2i\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$
$$x = \sin\left(2n\pi + \frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right) = \sin\left(\frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Но такъ какъ дуги:

$$\frac{3\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$$

имѣютъ соотвѣтственно тѣ же синусы (§ 9), что и дуги:

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3},$$

то $x$ будетъ имѣть три слѣдующихъ различныхъ значенія:

$$\sin\frac{\alpha}{3}, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$$

и другихъ имѣть не можетъ.

**§ 31. Уравненіе, изъ котораго опредѣляется $\operatorname{tang}\frac{a}{3}$, когда данъ $\operatorname{tang} a$.** — Если въ формулѣ:

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3\operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3\operatorname{tang}^2 a}$$

подставить $\frac{a}{3}$ вмѣсто $a$, то получится:

$$\operatorname{tang} a = \frac{3\operatorname{tang}\frac{a}{3} - \operatorname{tang}^3\frac{a}{3}}{1 - 3\operatorname{tang}^2\frac{a}{3}};$$

полагая же

$$\operatorname{tang} a = b, \quad \operatorname{tang}\frac{a}{3} = x,$$

будемъ имѣть уравненіе:

$$b = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

которое по освобожденіи отъ знаменателей и перенесенія всѣхъ членовъ въ первую часть приметъ видъ:

$$x^3 - 3bx^2 - 3x + b = 0.$$

Отсюда видно, что поставленная задача свелась къ уравненію третьей степени. Выяснимъ, что представляютъ корни этого урав-

нія. Пусть $\alpha$ обозначаетъ одну опредѣленную дугу изъ всѣхъ, тангенсъ которыхъ равенъ $b$; тогда значенія $a$ опредѣлятся по формулѣ:

$$a = k\pi + \alpha$$

и; слѣдовательно, значенія $x$ будутъ:

$$x = \operatorname{tang}\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Полагая $k = 3n + i$, гдѣ $i$ есть одно изъ чиселъ: 0, 1 или 2, перепишемъ предыдущую формулу въ слѣдующемъ видѣ:

$$x = \operatorname{tang}\left(n\pi + \frac{i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right);$$

отсюда слѣдуетъ, что $x$ имѣетъ три различныхъ значенія:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{3},\quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\quad \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

и другихъ имѣть не можетъ.

Если бы данное значеніе $b$ было безконечно огромнымъ, то уравненіе относительно $x$ свелось бы къ уравненію второй степени:

$$3x^2 - 1 = 0,$$

которое имѣетъ только два корня: $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Съ другой же стороны, такъ какъ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то выраженія для корней уравненія относительно $x$ будутъ:

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{tang}\frac{5\pi}{6};$$

значитъ, при $b = \infty$ одинъ изъ корней этого уравненія является безконечностью, а два другихъ приводятся къ $\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{tang}\frac{5\pi}{6}$. Слѣдовательно,

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \operatorname{tang}\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**§ 32.** Вообще, если данъ $\sin a$, $\cos a$ или $\operatorname{tang} a$ и требуется получить $\sin\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$ или $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$, то начинаютъ съ составленія уравненія, которое даетъ $\sin ma$, $\cos ma$ или $\operatorname{tang} ma$ въ функціи отъ $\sin a$, $\cos a$ или $\operatorname{tang} a$; далѣе, подставляя $\frac{a}{m}$ вмѣсто $a$, получаютъ уравненіе относительно искомой неизвѣстной. Это уравненіе, смотря по обстоятельствамъ, будетъ степени $m$ или $2m$. Въ *Дополненіи къ «Теоріи круговыхъ функцій»* [1]) мы дадимъ полное развитіе этого важнаго вопроса, а теперь только замѣтимъ, что опредѣленіе $\sin\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$ или $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ зависитъ только отъ уравненій второй степени, если $m$ есть степень 2; дѣйствительно, найдя $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$ или $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ въ функціи отъ $\sin a$, $\cos a$ или $\operatorname{tang} a$, мы можемъ точно такимъ же образомъ найти $\sin\frac{a}{4}$, $\cos\frac{a}{4}$ и $\operatorname{tang}\frac{a}{4}$, $\sin\frac{a}{8}$, $\cos\frac{a}{8}$ и $\operatorname{tang}\frac{a}{8}$, . . .

*Опредѣленіе тригонометрическихъ линій нѣкоторыхъ дугъ.*

**§ 33.** Можно вычислить тригонометрическія линіи безчисленнаго множества дугъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$ посредствомъ простыхъ извлеченій квадратныхъ корней.

**Дуги, выражающіяся формулою $\frac{n\pi}{2^m}$.**—Исходя изъ дуги $\frac{\pi}{2}$, мы можемъ получить по методу, изложенному въ §§ 25-мъ и 26-мъ, синусы и косинусы дугъ:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \ldots,$$

а потомъ синусы и косинусы ихъ кратныхъ. Дѣйствительно,

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

. . . . . ;

[1]) Пер. М. В. Пирожкова. Спб. 1902 г.

законъ, по которому составлены эти формулы, очевиденъ. Такимъ образомъ, каковы бы ни были цѣлыя числа $m$ и $n$, можно вычислить посредствомъ простыхъ извлеченій квадратныхъ корней синусъ и косинусъ дуги $\frac{n\pi}{2^m}$ и, слѣдовательно, также и другія тригонометрическія линіи этой дуги.

**§ 34. Дуги, выражающіяся формулою $\frac{n\pi}{3.2^m}$.**—Дуги $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$, будучи взаимно-пополнительными, имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ; поэтому

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 2\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3},$$

или

$$1 = 2\cos\frac{\pi}{3},$$

откуда

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3},\quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

далѣе, такъ какъ $\frac{\pi}{3}$ есть дополненіе для $\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Исходя изъ дуги $\frac{\pi}{6}$, получимъ по методу, изложенному въ §§ 25-мъ и 26-мъ, синусъ и косинусъ дугъ:

$$\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{24},\ \ldots;$$

такъ, напр., по формуламъ § 25-го

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

а по формуламъ § 26-го

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Отсюда видно, что можно вычислить въ квадратныхъ радикалахъ

тригонометрическія линіи дуги $\frac{n\pi}{3.2^m}$, каковы бы ни были цѣлыя числа $m$ и $n$.

**§ 35. Дуги, выражающіяся формулою $\frac{n\pi}{5.2^m}$.** — Пишемъ:

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5},$$
$$2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5};$$

перемножая эти двѣ формулы, находимъ:

$$4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=1;$$

первая часть послѣдняго равенства равна удвоенной суммѣ $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$, или, что одно и то же, удвоенной разности $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}$; слѣдовательно,

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2};$$

возвышая это равенство въ квадратъ и складывая съ предыдущимъ, получаемъ:

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2=\frac{5}{4},$$

откуда

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Зная, такимъ образомъ, сумму и разность косинусовъ дугъ $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$, выводимъ непосредственно значенія этихъ косинусовъ:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Отъ значеній $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}$ не трудно перейти къ значеніямъ $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{2\pi}{5}$; въ самомъ дѣлѣ,

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Исходя изъ дуги $\frac{\pi}{10}$, мы получимъ съ помощію пріемовъ, изложенныхъ въ §§ 25-мъ и 26-мъ, синусы и косинусы дугъ:

$$\frac{\pi}{20},\ \frac{\pi}{40},\ \ldots;$$

это значитъ, что мы можемъ получить въ квадратныхъ радикалахъ тригонометрическія линіи дуги $\frac{n\pi}{5.2^m}$, каковы бы ни были цѣлыя числа $m$ и $n$.

**§ 36. Дуги, выражающіяся формулою $\frac{n\pi}{3.5.2^m}$.** — Такъ какъ

$$\frac{\pi}{15}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{10},$$

то

$$\sin\frac{\pi}{15}=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10},$$
$$\cos\frac{\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10};$$

подставляя же вмѣсто синусовъ и косинусовъ дугъ $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{10}$ ихъ значенія, найденныя выше, находимъ:

$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}}{8}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

откуда слѣдуетъ, что мы можемъ вычислить тригонометрическія линіи дуги $\frac{n\pi}{3.5.2^m}$ при помощи простыхъ извлеченій квадратныхъ корней, каковы бы ни были цѣлыя числа $m$ и $n$.

**§ 37.** Дополнимъ предыдущее изложеніе таблицею синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ $\frac{\pi}{20}$. Будемъ исходить изъ формулъ:

$$\sin\frac{2\pi}{20}=\cos\frac{8\pi}{20}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\frac{8\pi}{20}=\cos\frac{2\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{4\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{6\pi}{20}=\cos\frac{4\pi}{20}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

данныхъ въ предыдущемъ параграфѣ. Полагая послѣдовательно въ формулахъ:

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$$
$$\cos\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$$

$a=\frac{2\pi}{20}$ и $a=\frac{6\pi}{20}$, находимъ:

$$\sin\frac{\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{9\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

и

$$\sin\frac{3\pi}{20}=\cos\frac{7\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{7\pi}{20}=\cos\frac{8\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}};$$

наконецъ, имѣемъ еще:

$$\sin\frac{8\pi}{20}=\cos\frac{5\pi}{20}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итакъ, сводя все въ одну таблицу, пишемъ:

$$\sin\frac{\pi}{20}=\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{2\pi}{20}=\cos\frac{8\pi}{20}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\sin\frac{3\pi}{20}=\cos\frac{7\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{4\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{5\pi}{20}=\cos\frac{5\pi}{20}=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sin\frac{6\pi}{20}=\cos\frac{4\pi}{20}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{7\pi}{20}=\cos\frac{3\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{8\pi}{20}=\cos\frac{2\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\sin\frac{9\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

При помощи этихъ формулъ можно вычислить синусы и косинусы дугъ, кратныхъ $\frac{\pi}{20}$, съ какимъ-угодно большимъ приближеніемъ.

**§ 38.** Также легко составить таблицу синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ $\frac{\pi}{60}$. Девять изъ этихъ дугъ суть кратныя $\frac{\pi}{20}$ и, слѣдовательно, ихъ синусы и косинусы вошли въ предыдущую таблицу; среди кратныхъ $\frac{\pi}{60}$ находятся дуги $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{12}$, также какъ и ихъ дополненія въ § 34-мъ мы уже получили синусы и косинусы этихъ дугъ. Изъ шестнадцати остальныхъ кратныхъ $\frac{\pi}{60}$ восемь суть кратныя $\frac{\pi}{30}$, именно:

$$\frac{\pi}{30},\ \frac{2\pi}{30},\ \frac{4\pi}{30},\ \frac{7\pi}{30}$$

и ихъ дополненія; наконецъ, послѣднія восемь дугъ, кратныхъ относительно $\frac{\pi}{60}$, суть слѣдующія:

$$\frac{\pi}{60},\ \frac{7\pi}{60},\ \frac{11\pi}{60},\ \frac{13\pi}{60}$$

и ихъ дополненія. Можно получить непосредственно синусы и косинусы всѣхъ этихъ дугъ, при помощи предыдущей таблицы, примѣняя тотъ же методъ, какъ и для дуги $\frac{\pi}{15}$; дѣйствительно, стоитъ только для этого воспользоваться тождествами:

$$\frac{\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{6\pi}{20},\quad \frac{\pi}{30}=\frac{7\pi}{20}-\frac{\pi}{3},$$
$$\frac{2\pi}{30}=\frac{8\pi}{20}-\frac{\pi}{3},\quad \frac{7\pi}{60}=\frac{6\pi}{20}-\frac{\pi}{3},$$
$$\frac{4\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{20},\quad \frac{11\pi}{60}=\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{20},$$
$$\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{20};\quad \frac{13\pi}{30}=\frac{11\pi}{20}-\frac{\pi}{3};$$

**такимъ образомъ находимъ:**

$$\sin\frac{\pi}{30}=\cos\frac{14\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(1+\sqrt{5}),$$
$$\sin\frac{2\pi}{30}=\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{8}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\sin\frac{4\pi}{30}=\cos\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}(1+\sqrt{5})-\frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{7\pi}{30}=\cos\frac{8\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\sin\frac{8\pi}{30}=\cos\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\sin\frac{11\pi}{30}=\cos\frac{4\pi}{30}=\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})+\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{13\pi}{30}=\cos\frac{2\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\sin\frac{14\pi}{30}=\cos\frac{\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{3}}+\frac{1}{8}\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$$

**и**

$$\sin\frac{\pi}{60}=\cos\frac{29\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{7\pi}{60}=\cos\frac{23\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{11\pi}{60}=\cos\frac{19\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{13\pi}{60}=\cos\frac{17\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{17\pi}{60}=\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{19\pi}{60}=\cos\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{23\pi}{60}=\cos\frac{7\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{29\pi}{60}=\cos\frac{\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

**§ 39.** По опредѣленію § 5-го синусъ дуги, лежащей между 0 и $\pi$, равенъ половинѣ хорды, стягивающей двойную дугу. Въ частности, синусъ дуги $\frac{\pi}{n}$ есть половина стороны правильнаго многоугольника о $n$ сторонахъ, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго равенъ единицѣ. Отсюда вытекаетъ (**§§ 33** и слѣд.), что стороны квадрата, правильнаго шестиугольника, равносторонняго треугольника, правильнаго десятиугольника и правильнаго пятиугольника, вписанныхъ въ кругъ, соотвѣтственно равны

$$\sqrt{2},\quad 1,\quad \sqrt{3},\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

равнымъ образомъ, стороны правильныхъ 15-угольника и 30-угольника, вписанныхъ въ кругъ, равны

$$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Такимъ образомъ мы здѣсь вновь доказываемъ предложенія относительно квадрата и правильнаго шестиугольника, извѣстныя изъ Геометріи. Если обозначить черезъ $R$ радіусъ круга, а черезъ $D$ и $P$ стороны правильныхъ десятиугольника и пятиугольника, вписанныхъ въ кругъ, то мы можемъ написать:

$$\frac{D}{R}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{P}{R}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

откуда

$$D^2+R^2=P^2,\quad \left(D+\frac{R}{2}\right)^2=R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что *квадратъ стороны правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ, равенъ квадрату стороны правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ, увеличенному на квадратъ радіуса.*

Вторая формула показываетъ, что *для полученія стороны правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ, достаточно построить прямоугольный треугольникъ, катетами котораго были бы радіусъ круга и половина этого радіуса, а затѣмъ взять избытокъ гипотенузы этого*

*треугольника надъ меньшимъ катетомъ*. Та же самая формула можетъ быть написана въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{R}{D} = \frac{D}{R-D}$$

и тогда она выразитъ, что $D$ есть срадняя пропорціональная между $R$ и $R-D$, т.-е. что *сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ, равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*

Итакъ, формулы, выведенныя въ §§ 33-емъ и слѣдующихъ, естественнымъ образомъ приводятъ къ тѣмъ построеніямъ, какія употребляются въ Геометріи при вписываніи въ кругъ правильнаго шестиугольника и правильнаго десятиугольника; эти же построенія, очевидно, приводятъ къ построенію вписанныхъ равносторонняго треугольника и правильнаго пятиугольника. Что касается вписыванія правильныхъ 15-угольника и 30-угольника, то и это вывести не трудно; въ самомъ дѣлѣ, дуга, стягиваемая стороною правильнаго вписаннаго 15-угольника, равна разности дугъ, стягиваемыхъ сторонами правильныхъ шестиугольника и десятиугольника, что мы уже замѣтили выше.

*Замѣчаніе о соотношеніяхъ между различными тригонометрическими линіями.*

§ 40. Формулы, относящіяся къ сложенію дугъ, а также всѣ тѣ, которыя мы изъ нихъ вывели, справедливы, каковы ни были разсматриваемыя дуги; слѣдовательно, такія формулы суть истинныя тождества. Кромѣ того, при помощи этихъ формулъ мы можемъ производить различныя преобразованія надъ выраженіями, зависящими отъ нѣсколькихъ тригонометрическихъ линій, и, значитъ, можемъ составить сколько-угодно тождественныхъ соотношеній.

Напр., мы нашли въ § 35-мъ, что

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2},$$

или

$$1 + 2\sin\frac{\pi}{10} = 2\sin\frac{3\pi}{10};$$

умножая же на $\cos a$, получаемъ:

$$\cos a + 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos a = 2 \sin \frac{3\pi}{10} \cos a,$$

что можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{10} - a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{10} + a\right) = \\ = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - a\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{10} + a\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Разсмотримъ, во-вторыхъ, выраженіе:

$$\sin a + \sin b + \sin c - 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2},$$

въ которомъ $a$, $b$, $c$ обозначаютъ какія-угодно дуги. Послѣдній членъ равенъ

$$-2 \cos \frac{a}{2} \left(\cos \frac{b-c}{2} + \cos \frac{b+c}{2}\right),$$

или, что одно и то же,

$$-\cos \frac{a+b-c}{2} - \cos \frac{a-b+c}{2} - \cos \frac{-a+b+c}{2} - \cos \frac{a+b+c}{2};$$

слѣдовательно, разсматриваемое выраженіе можетъ быть переписано въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\sin a + \sin \frac{b+c-a-\pi}{2}\right) + \left(\sin b + \sin \frac{a+c-b-\pi}{2}\right) + \left(\sin c + \sin \frac{a+b-c-\pi}{2}\right) + \sin \frac{a+b+c-\pi}{2};$$

далѣе, преобразовывая суммы, заключенныя въ скобки, въ произведенія и замѣняя послѣдній членъ также произведеніемъ $2 \sin \frac{a+b+c-\pi}{4} \cos \frac{a+b+c-\pi}{4}$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c - 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} = \\ = 2 \sin \frac{a+b+c-\pi}{4} \left(\cos \frac{3a-b-c+\pi}{4} + \cos \frac{3b-c-a+\pi}{4} + \right. \\ \left. + \cos \frac{3c-a-b+\pi}{4} + \cos \frac{a+b+c-\pi}{4}\right); \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

полученное равенство есть тождество, т.-е. оно справедливо при всякихъ значеніяхъ дугъ: $a$, $b$, $c$. Отсюда заключаемъ, что если эти дуги удовлетворяютъ соотношенію:

$$a + b + c = (4n + 1)\pi,$$

гдѣ $n$ обозначаетъ какое-угодно цѣлое число, положительное, равное нулю или отрицательное, то

$$\sin a + \sin b + \sin c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} = 0. \qquad (3)$$

**§ 41.** Чтобы рѣшить, будетъ ли данное алгебраическое равенство между различными тригонометрическими линіями тождествомъ, или нѣтъ, самый общій пріемъ состоитъ въ преобразованіи этого соотношенія такимъ образомъ, чтобы одна изъ неопредѣленныхъ дугъ, входящихъ въ него, входила бы не иначе, какъ только подъ знакомъ одной и той же тригонометрической линіи. Далѣе, располагая по степенямъ такой тригонометрической линіи всѣ члены нашего равенства и замѣчая, что коэффиціенты при различныхъ степеняхъ этой линіи должны быть нулями, приравниваемъ ихъ нулю и получаемъ такимъ образомъ нѣсколько тождественныхъ соотношеній, содержащихъ одною перемѣнною меньше, чѣмъ данное. Точно такъ же можно поступить съ полученными соотношеніями, и т. д., и дойти такимъ путемъ до соотношеній, тождественность которыхъ очевидна, если только данное соотношеніе представляетъ тождество. Впрочемъ, въ большинствѣ случаевъ не трудно убѣдиться въ тождественности разсматриваемыхъ формулъ, если воспользоваться надлежащимъ образомъ основными формулами, выведенными выше. Такъ, напр., повѣряютъ непосредственно тождественность формулы (2), преобразовывая произведенія въ обѣихъ частяхъ равенства въ суммы. Что касается формулы (1), то она повѣряется немедленно, какъ только мы развернемъ каждый изъ синусовъ, входящихъ въ нее.

**§ 42.** Если разсматриваемое равенство между тригонометрическими линіями не есть тождество, но удовлетворяется при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между дугами, входящими въ него, то можно исключить столько дугъ, сколько такихъ соотношеній, и получить въ результатѣ такое равенство, которое должно быть

тождествомъ. Напр., соотношеніе (3) не тождественно, но удовлетворяется, если дуги: $a$, $b$, $c$ связаны равенствомъ:

$$a+b+c=(4n+1)\pi, \qquad (4)$$

гдѣ $n$ обозначаетъ цѣлое число. Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно $c$ замѣнить выраженіемъ $(4n+1)\pi-a-b$ и показать, что результатъ:

$$\sin a+\sin b+\sin(a+b)-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}=0$$

представляетъ тождество. Переписываемъ послѣднее соотношеніе въ слѣдующемъ видѣ:

$$2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}-2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)=0.$$

Отсюда заключаемъ, что соотношеніе (3) есть слѣдствіе соотношенія (4), но что оно болѣе общее, чѣмъ это послѣднее; дѣйствительно, оно повѣряется, по формулѣ (2), не только для значеній $a$, $b$, $c$, удовлетворяющихъ равенству (4), но также и для значеній, удовлетворяющихъ соотношенію:

$$\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-c-a+\pi}{4}+$$
$$+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}=0.$$

Только въ очень рѣдкихъ случаяхъ алгебраическое равенство между тригонометрическими линіями нѣсколькихъ дугъ можетъ быть замѣнено однимъ или нѣсколькими алгебраическими соотношеніями между самими дугами. Заканчивая эту главу, мы приведемъ одинъ такой примѣръ. Разсмотримъ соотношеніе:

$$\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Замѣняя въ немъ $\cos a+\cos b$ черезъ $2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, или, что одно и то же, черезъ $2\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-2\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$, а $\cos c$ черезъ $1-2\sin^2\frac{c}{2}$, получаемъ:

$$\left(\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)^2-\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}=0,$$

или

$$\left(\sin\frac{c}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right)\left(\sin\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)=0,$$

или, наконецъ,

$$\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\sin\frac{-a+b+c+\pi}{4}\times$$
$$\times\sin\frac{a-b+c+\pi}{4}\sin\frac{a+b-c+\pi}{4}=0;$$

чтобы это соотношеніе имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы какая-нибудь одна изъ четырехъ дугъ:

$$\frac{a+b+c-\pi}{4},\quad \frac{-a+b+c+\pi}{4},$$
$$\frac{a-b+c+\pi}{4},\quad \frac{a+b-c+\pi}{4}$$

равнялась $n\pi$, кратному полуокружности. Итакъ, наше соотношеніе равносильно системѣ четырехъ слѣдующихъ соотношеній:

$$a+b+c=(4n+1)\pi,\qquad -a+b+c=(4n-1)\pi,$$
$$a-b+c=(4n-1)\pi,\qquad a+b-c=(4n-1)\pi.$$

### УПРАЖНЕНІЯ.

I. Доказать формулу:

$$\operatorname{tang}(a+b+c+\ldots+k)=\frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots},$$

гдѣ $S_1$ обозначаетъ сумму тангенсовъ $m$ дугъ: $a$, $b$, $c,\ldots,k$, $S_2$—сумму произведеній по-парно тѣхъ же самыхъ тангенсовъ, $S_3$ — сумму ихъ произведеній по три, и т. д., наконецъ, $S_m$ обозначаетъ произведеніе всѣхъ тангенсовъ, и вывести изъ этой формулы выраженіе $\operatorname{tang} ma$ въ функціи отъ $\operatorname{tang} a$.

II. Доказать, при тѣхъ же обозначеніяхъ, что и въ предыдущемъ вопросѣ, формулы:

$$\sin(a+b+c+\ldots+k)=(S_1-S_3+S_5-\ldots)\cos a\,.\cos b\ldots\cos k,$$
$$\cos(a+b+c+\ldots+k)=(1-S_2+S_4-\ldots)\cos a\,.\cos b\ldots\cos k$$

и вывести изъ нихъ выраженія $\sin ma$ и $\cos ma$ въ функціи отъ $\sin a$ и $\cos a$.

III. Составить уравненіе для опредѣленія $\cos\frac{a}{5}$ по данному $\cos a$ и уравненіе для опредѣленія $\sin\frac{a}{5}$ по данному $\sin a$. Рѣшить оба эти уравненія

въ тѣхъ случаяхъ, когда $a$ равно одному изъ значеній: $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$, и найти въ каждомъ изъ этихъ случаевъ значеніе корней.

IV. Окружность круга раздѣлена на $n$ равныхъ частей; если изъ точекъ дѣленія опустить перпендикуляры на какой-нибудь діаметръ, то сумма перпендикуляровъ, расположенныхъ съ одной стороны діаметра, будетъ равна суммѣ перпендикуляровъ, расположенныхъ съ другой стороны.

V. Вычислить стороны правильныхъ многоугольниковъ о 3, 6, 5, 10, 15, 20, 30 сторонахъ, вписанныхъ въ кругъ, радіусъ котораго равенъ единицѣ.

VI. Найти алгебраическое соотношеніе между такими дугами: $a$, $b$, $c$, которыя удовлетворяютъ равенствамъ:

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c,$$
$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

---

# ГЛАВА ВТОРАЯ.

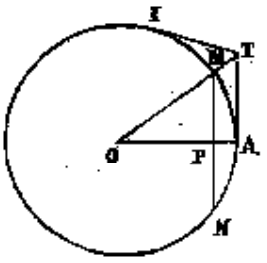
## Тригонометрическія таблицы.

*Предварительныя предложенія.*

**§ 43.** Чтобы можно было пользоваться круговыми функціями, нужно знать, какъ найти значенія тригонометрическихъ линій какой-угодно данной дуги, и обратно, какъ найти значеніе дуги, когда извѣстна одна изъ ея тригонометрическихъ линій. Для этой цѣли необходимо имѣть Таблицу, по которой мы могли бы опредѣлять значенія тригонометрическихъ линій, соотвѣтствующихъ послѣдовательнымъ значеніямъ дуги между 0 и $\frac{\pi}{2}$, достаточно близкимъ между собою. Ниже мы укажемъ на тѣ пріемы, съ помощію которыхъ можно составить подобную Таблицу; далѣе мы увидимъ, какъ при помощи такой Таблицы можно находить тригонометрическія линіи какой-угодно дуги, и обратно, какъ находить наименьшую положительную дугу, соотвѣтствующую данной тригонометрической линіи. Но сначала мы должны изложить нѣкоторыя предварительныя предложенія, необходимыя для нашей конечной цѣли.

**§ 44. Теорема I.**—*Всякая дуга, содержащаяся между* $0$ *и* $\frac{\pi}{2}$, *больше своего синуса и меньше своего тангенса.*

Пусть (*черт.* 7) $AM = x$ есть нѣкоторая дуга между 0 и $\frac{\pi}{2}$, $MP$ — синусъ и $AT$ — тангенсъ этой дуги. Продолжаемъ $MP$ до пере-




*Черт.* 7.

сѣченія съ окружностью въ точкѣ $N$ и ведемъ касательную $TI$; въ такомъ случаѣ

$$\text{дуга } MAN > MN \text{ и дуга } AMI < AT + TI.$$

Но такъ какъ $x$ есть половина дуги $MAN$, или равной ей дуги $AMI$, $\sin x$ есть половина $MN$, а $\operatorname{tang} x$ равенъ каждой изъ линій $AT$ и $TI$, то

$$x > \sin x \text{ и } x < \operatorname{tang} x.$$

**Слѣдствіе.**—*Если дуга $x$ уменьшается отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ безпредѣльно приближается къ единицѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу равенства $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ мы можемъ написать:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

или, по раздѣленіи на $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда вытекаетъ, что отношеніе $\frac{x}{\sin x}$ заключается между единицею и дробью $\frac{1}{\cos x}$, которая въ предѣлѣ, при $x = 0$, равна единицѣ; слѣдовательно,

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ или } \lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**§ 45. Теорема II.**—*Разность между дугою, заключающеюся въ промежуткѣ отъ* 0 *до* $\frac{\pi}{2}$, *и ея синусомъ меньше четверти и даже шестой части куба этой дуги.*

Для доказательства, что эта разность меньше четверти куба дуги, достаточно разсмотрѣть неравенство:

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} > \frac{x}{2},$$

выведенное въ § 44-мъ; умножая его на $2\cos^2\frac{x}{2} = 2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$, получаемъ:

$$\sin x > x - x\sin^2\frac{x}{2}, \text{ или } x - \sin x < x\sin^2\frac{x}{2};$$

но такъ какъ $\sin\frac{x}{2}$ меньше $\frac{x}{2}$ и, слѣдовательно, $\sin^2\frac{x}{2}$ меньше $\frac{x^2}{4}$, то и подавно

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

**§ 46.** Для доказательства, что разность $x-\sin x$ меньше $\frac{x^3}{6}$, можно пользоваться различными пріемами; простѣйшій изъ нихъ состоитъ въ томъ, чтобы исходить изъ формулы:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

выведенной въ § 22-мъ; замѣняя въ ней $x$ послѣдовательно черезъ $\frac{x}{2}, \frac{x}{3^2}, \ldots, \frac{x}{3^n}$, получаемъ:

$$\begin{aligned}
3\sin\frac{x}{3} - \sin x &= 4\sin^3\frac{x}{3},\\
3\sin\frac{x}{3^2} - \sin\frac{x}{3} &= 4\sin^3\frac{x}{3^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
3\sin\frac{x}{3^n} - \sin\frac{x}{3^{n-1}} &= 4\sin^3\frac{x}{3^n};
\end{aligned}$$

умножая эти равенства соотвѣтственно на $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}$ и результаты складывая, находимъ:

$$3^n\sin\frac{x}{3^n} - \sin x = 4\left(\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{2^n} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right),$$

или

$$x \cdot \frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\left(\frac{x}{3^n}\right)} - \sin x = 4\left(\sin^3 \frac{x}{3} + 3\sin^3 \frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3 \frac{x}{3^n}\right).$$

Если цѣлое число $n$ увеличивается безпредѣльно, то дуга $\frac{x}{3^n}$ стремится къ нулю и отношеніе $\frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\left(\frac{x}{3^n}\right)}$ стремится къ единицѣ. Такимъ образомъ, первая часть предыдущаго равенства имѣетъ предѣломъ разность $x - \sin x$; слѣдовательно, и вторая часть стремится къ этому же предѣлу. Но такъ какъ синусъ меньше дуги, то предѣлъ второй части нашего равенства меньше предѣла, къ которому стремится геометрическая прогрессія:

$$4\left(\frac{x^3}{3^3} + \frac{x^3}{3^5} + \frac{x^3}{3^7} + \ldots + \frac{x^3}{3^{2n+1}}\right);$$

этотъ послѣдній предѣлъ равенъ $\frac{x^3}{6}$ и, слѣдовательно,

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

**§ 47.** Предыдущія теоремы даютъ такимъ образомъ два предѣла, $x$ и $x - \frac{x^3}{6}$, между которыми содержится $\sin x$. Отсюда не трудно вывести два предѣла, между которыми содержится $\cos x$; въ самомъ дѣлѣ,

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

и такъ какъ $\sin \frac{x}{2}$ заключается между $\frac{x}{2}$ и $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$, то прежде всего

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2};$$

далѣе,

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2, \text{ или } < 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} - 2\left(\frac{x^3}{48}\right)^2,$$

а слѣдовательно, и подавно

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Такимъ образомъ $\cos x$ содержится между $1 - \frac{x^3}{2}$ и $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

*Дѣленіе окружности.*

**§ 48.** До сихъ поръ мы выражали дуги въ частяхъ радіуса, но въ приложеніяхъ теоріи круговыхъ функцій гораздо удобнѣе выражать ихъ въ частяхъ окружности. Для этой цѣли согласились раздѣлить всю окружность круга на 360 равныхъ частей и назвали эти части *градусами*, такъ что полуокружность заключаетъ въ себѣ 180 градусовъ, а квадрантъ 90 градусовъ. Каждый градусъ подраздѣляется на 60 *минутъ* и каждая минута на 60 *секундъ*. Градусы, минуты и секунды обозначаются соотвѣтственно $^0$, $'$, $''$; дуги, меньшія $1''$, вычисляются въ десятичныхъ доляхъ секунды. Такимъ образомъ, дуга, содержащая 23 градуса 27 минутъ 31 секунду и 8 десятыхъ секунды, изобразится слѣдующимъ образомъ:

$$23^0\,27'\,31'',8.$$

Если черезъ $x$ обозначить длину дуги и черезъ $N$ — число градусовъ, содержащихся въ этой дугѣ, то мы можемъ написать равенство:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{N}{180},$$

изъ котораго находится одно изъ чиселъ, $x$ или $N$, когда извѣстно другое. Если за единицу принять секунду, то для опредѣленія числа $x'$ секундъ, содержащихся въ дугѣ $x$, пользуются формулою:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{x'}{648000}. \qquad (1)$$

Если, напр., требуется найти число секундъ, содержащихся въ дугѣ, равной 1, то мы напишемъ:

$$x' = \frac{648000}{\pi};$$

зная, что $\pi$ равно

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots,$$

и вычисляя съ точностью до тысячныхъ долей секунды, находимъ:

$$x' = 206264'',806 = 57^0 17'44'',806.$$

*Составленіе Таблицы синусовъ и косинусовъ.*

**§ 49.** Чтобы получить тригонометрическія линіи какой-угодно дуги, достаточно знать тригонометрическія линіи дугъ, содержащихся между 0 и 90 градусами. Можно даже ограничиться дугами, содержащимися между 0 и 45 градусами, потому что двѣ дополнительныя дуги, такія какъ $45^0+x$ и $45^0-x$, имѣютъ однѣ и тѣ же тригонометрическія линіи. Кромѣ того, если извѣстны синусы и косинусы для всѣхъ дугъ, содержащихся между 0 и 45 градусами, то четыре остальныхъ тригонометрическихъ линіи могутъ быть опредѣлены при помощи формулъ, выведенныхъ въ **§ 11**-мъ.

Послѣ этихъ замѣчаній покажемъ, какимъ образомъ можно составить Таблицу синусовъ и косинусовъ всѣхъ дугъ отъ 0 до 45 градусовъ, черезъ каждыя 10 секундъ.

**Синусъ и косинусъ дуги въ 10 секундъ.** — Обозначимъ черезъ $\varepsilon$ длину дуги въ 10 секундъ; по **§ 48**-му напишемъ:

$$\varepsilon = \frac{10\pi}{648000} = \frac{\pi}{64800};$$

выполняя же дѣленіе, находимъ:

$$\varepsilon = 0{,}000048481368110\ldots$$

Далѣе, по **§§ 44**-му и **46**-му

$$\sin\varepsilon < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sin\varepsilon > \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6}$$

и, кромѣ того,

$$\frac{\varepsilon^3}{6} < 0{,}00000\ 00000\ 00021;$$

слѣдовательно,

$$\sin 10'' < 0{,}00004\ 84813\ 68110,$$
$$\sin 10'' > 0{,}00004\ 84813\ 68089.$$

Эти два предѣла для $\sin 10''$ имѣютъ двѣнадцать первыхъ цифръ послѣ запятой общихъ и отсюда же видно, что съ точностью до половины единицы тринадцатаго знака послѣ запятой

$$\sin 10'' = 0{,}00004\ 84813\ 681.$$

Вычислимъ теперь $\cos 10''$; по **§ 47**-му

$$\cos\varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{и} \quad \cos\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24};$$

а такъ какъ $\varepsilon < 0{,}00005$, или $< \frac{1}{2.10^4}$, то

$$\frac{\varepsilon^4}{24} < \frac{1}{384.10^{16}} < \frac{1}{3.10^{18}},$$

откуда слѣдуетъ, что $1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ есть значеніе $\cos\varepsilon$ съ приближеніемъ до половины единицы восемнадцатаго знака послѣ запятой. Ограничиваясь тринадцатью первыми цифрами послѣ запятой, находимъ:

$$\cos 10'' = 0{,}99999\ 99988\ 248.$$

**§ 50. Синусы и косинусы дугъ черезъ каждыя 10 секундъ отъ 0 до 45 градусовъ.**—Если въ формулахъ:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\cos b \sin a,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos b \cos a$$

положить $a = (m-1)b$ то получится:

$$\left.\begin{aligned} \sin mb &= 2\cos b \sin(m-1)b - \sin(m-2)b, \\ \cos mb &= 2\cos b \cos(m-1)b - \cos(m-2)b. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

При $b = 10''$ и $m = 2$ эти формулы дадутъ значенія $\sin 20''$ и $\cos 20''$. Вообще, если извѣстны синусы и косинусы двухъ послѣдовательныхъ дугъ, кратныхъ относительно $b = 10''$, то по формуламъ (1) мы найдемъ синусъ и косинусъ слѣдующей кратной дуги. Замѣчая, кромѣ того, что постоянный множитель $2\cos 10''$ весьма мало отличается отъ 2, мы можемъ сократить вычисленія; въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$2\cos 10'' = 2 - k,$$

гдѣ

$$k = 0{,}00000\ 00023\ 504,$$

мы формулы (1) преобразуемъ въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} [\sin mb - \sin(m-1)b] &= [\sin(m-1)b - \sin(m-2)b] - k\sin(m-1)b, \\ [\cos mb - \cos(m-1)b] &= [\cos(m-1)b - \cos(m-2)b] - k\cos(m-1)b. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Эти формулы (2) послужатъ для вычисленія разностей:

$$\left.\begin{aligned}&\sin mb - \sin(m-1)b,\\&\cos mb - \cos(m-1)b\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

посредствомъ предыдущихъ разностей:

$$\left.\begin{aligned}&\sin(m-1)b - \sin(m-2)b,\\&\cos(m-1)b - \cos(m-2)b;\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

эти послѣднія, также какъ и $\sin(m-1)b$ и $\cos(m-1)b$, вычисляются предварительно. Прикладывая затѣмъ соотвѣтственно къ разностямъ (3) извѣстныя величины $\sin(m-1)b$ и $\cos(m-1)b$, мы получимъ $\sin mb$ и $\cos mb$.

Разности (3) легко выводятся изъ вычисленныхъ разностей (4); въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно вычесть соотвѣтственно изъ этихъ послѣднихъ произведенія $k\sin(m-1)b$ и $k\cos(m-1)b$, гдѣ множитель $k$ есть постоянный; упомянутыя произведенія вычисляются довольно быстро, если составить заранѣе таблицу произведеній $k$ на девять первыхъ цѣлыхъ чиселъ.

**§ 51.** Какъ бы ни были утомительны вычисленія, на ходъ которыхъ мы только-что указали, все-таки возможно составить Таблицу синусовъ и косинусовъ всѣхъ дугъ отъ 0 до 45 градусовъ черезъ каждыя 10 секундъ. При этомъ всякій разъ слѣдуетъ опредѣлять, какое вліяніе окажутъ на вычисляемые синусы и косинусы ошибки, накопляющіяся по мѣрѣ хода дѣйствій. Мы исходили изъ значеній $\sin 10''$ и $\cos 10''$, вычисленныхъ съ точностью до половины единицы тринадцатаго знака послѣ запятой; предположимъ, что во всѣхъ послѣдующихъ вычисленіяхъ сохраняется одно и то же число $\mu$ цифръ послѣ запятой; посмотримъ, какое значеніе надо придать $\mu$, чтобы получить желаемое приближеніе. Обозначимъ вообще черезъ $\alpha_m$ приближенное значеніе $\sin m.10''$ или $\cos m.10''$, вычисленнаго съ $\mu$ цифрами послѣ запятой, и черезъ $\alpha_m + \varepsilon_m$ точное его значеніе; тогда каждое изъ уравненій (1) мы можемъ переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\alpha_m + \varepsilon_m = (2-k)(\alpha_{m-1} + \varepsilon_{m-1}) - (\alpha_{m-2} + \varepsilon_{m-2}).$$

Такъ какъ $\alpha_{m-1}$ и $\alpha_{m-2}$ вычислены съ $\mu$ цифрами послѣ запятой, то произведеніе $(2-k)\alpha_{m-1}$ вычисляется также съ $\mu$ цифрами послѣ

занятой и $\alpha_{m-2}$ вычитается изъ этого приближеннаго произведенія; разность будетъ $\alpha_m$. Итакъ,

$$\alpha_m = (2-k)\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2} - \zeta_m.$$

гдѣ $\zeta_m$ обозначаетъ положительную или отрицательную ошибку, происходящую вслѣдствіе подстановки вмѣсто $(2-k)\alpha_{m-1}$ приближеннаго значенія этого произведенія съ точностью до $\frac{1}{10^\mu}$. Изъ двухъ предыдущихъ уравненій выводимъ:

$$\varepsilon_m = (2-k)\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \zeta_m;$$

но такъ какъ количество $k\varepsilon_{m-1}$ очень мало сравнительно съ $2\varepsilon_{m-1}$ и не повліяетъ замѣтнымъ образомъ на высшій предѣлъ ошибки $\zeta_m$, если его ввести туда, то мы можемъ написать просто:

$$\varepsilon_m = 2\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \zeta_m,$$

или

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \zeta_m.$$

Полагая послѣдовательно $m=2, 3, \ldots, m$ и замѣчая, что $\varepsilon_0$ есть нуль, потому что въ sin0 и cos0 не входитъ никакой ошибки, находимъ:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) &= \varepsilon_1 + \zeta_2,\\
(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \zeta_3,\\
(\varepsilon_4 - \varepsilon_3) &= (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \zeta_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) &= (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2}) + \zeta_m.
\end{aligned}$$

Складывая всѣ эти равенства, получаемъ:

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_m,$$

гдѣ каждое изъ количествъ: $\zeta_2$, $\zeta_3$, ... по абсолютной величинѣ меньше $\frac{1}{10^\mu}$. Такъ какъ то же самое можно сказать и относительно ихъ средняго ариѳметическаго, которое мы обозначимъ черезъ $\theta_m$, то предыдущее уравненіе перейдетъ въ слѣдующее:

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + (m-1)\theta_m.$$

Придавая $m$ послѣдовательныя значенія: 2,3, . . . , $m$, пишемъ:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 &= \varepsilon_1 + \theta_2, \\
\varepsilon_3 - \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 + 2\theta_3, \\
\varepsilon_4 - \varepsilon_3 &= \varepsilon_1 + 3\theta_4, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} &= \varepsilon_1 + (m-1)\theta_m .
\end{aligned}$$

откуда, по сложеніи всѣхъ этихъ равенствъ,

$$\varepsilon_m = m\varepsilon_1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 3\theta_4 + \ldots + (m-1)\theta_m .$$

Зная же, что абсолютная величина $\varepsilon_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$, что абсолютная величина каждаго изъ количествъ: $\theta_2, \theta_3, \ldots$ меньше $\frac{1}{10^{\mu}}$ и что, кромѣ того, сумма $1+2+3+\ldots+(m-1)$ равна $\frac{m(m-1)}{2}$, заключаемъ, что, независимо отъ знака,

$$\varepsilon_m < \frac{m}{2.10^{13}} + \frac{m(m-1)}{2.10^{\mu}} .$$

Опредѣлимъ, теперь, по этой формулѣ, какая можетъ быть ошибка въ синусѣ и косинусѣ дуги въ 45 градусовъ, заканчивающей нашу таблицу. Такъ какъ дуга въ 45 градусовъ содержитъ 16200 разъ дугу въ 10 секундъ, то полагаемъ $m = 16200$; предыдущее неравенство въ такомъ случаѣ приметъ видъ:

$$\varepsilon_{16200} < \frac{16200}{2.10^{13}} + \frac{16200 \times 16199}{2 \times 10^{\mu}} ,$$

откуда и подавно

$$\varepsilon_{16200} < \frac{1}{10^{9}} + \frac{1,5}{10^{\mu-8}} .$$

При $\mu = 17$ вторая дробь равна $\frac{1,5}{10^{9}}$ и мы получаемъ:

$$\varepsilon_{16200} < \frac{2,5}{10^{9}} , \text{ или } < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^{8}};$$

такимъ образомъ, ошибка въ $\sin 45^0$ или въ $\cos 45^0$ будетъ меньше четверти единицы восьмого знака послѣ занятой.

Изъ этихъ разсужденій вытекаетъ, что исходя изъ значеній $\sin 10''$ и $\cos 10''$, полученныхъ съ точностью до половины единицы тринадцатаго знака послѣ запятой, и вычисляя съ 17 цифрами послѣ запятой синусы и косинусы послѣдующихъ дугъ, мы можемъ ручаться за точность первыхъ 8 цифръ послѣ запятой до самаго конца составленія Таблицы.

**§ 52.** Но когда приходится производить столько вычисленій, то необходимо подвергать получаемые результаты частымъ повѣркамъ. Также, еще до начала такихъ вычисленій, слѣдуетъ вычислить непосредственно синусы и косинусы нѣсколькихъ дугъ, чтобы при дальнѣйшихъ дѣйствіяхъ имѣть въ достаточномъ числѣ члены для сравненія; напр., мы дали (§§ 37 и 38) выраженія синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ $\frac{\pi}{60}$, т.-е. дугъ черезъ каждые 3 градуса; эти синусы и косинусы надлежитъ вычислить съ достаточнымъ числомъ цифръ послѣ запятой; если промежутокъ въ 3 градуса окажется слишкомъ значительнымъ, то можно привести его къ половинѣ или четверти, пользуясь формулами:

$$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\quad \cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

а также формулами, относящимися къ сложенію и умноженію дугъ; такимъ образомъ, не трудно составить весьма точную предварительную таблицу синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ относительно 45 минутъ, или, что то же самое, 2700 секундъ. Эта первая таблица не только дастъ возможность повѣрки, но и послужитъ также для полученія большей точности въ вычисленіяхъ, относящихся къ окончательной Таблицѣ, потому что синусы и косинусы дугъ черезъ каждыя 2700 секундъ въ этомъ случаѣ могутъ быть вычислены со всею желаемою точностью.

Наконецъ, когда вся Таблица составлена, то можно еще повѣрить ее многочисленными способами, пользуясь какъ тождествомъ:

$$\sin(90^\circ-x)+\sin(18^\circ-x)+\sin(18^\circ+x)=$$
$$=\sin(54^\circ-x)+\sin(54^\circ+x),$$

даннымъ въ **§ 40**-мъ, такъ и другими формулами въ томъ же родѣ.

Хотя можно составить всю Таблицу такъ, какъ указано въ **§ 50**-мъ, но слѣдуетъ остановиться, когда вычисленіе доведено до

дуги въ 30 градусовъ. Дѣйствительно, имѣя синусы и косинусы дугъ черезъ каждыя 10 секундъ отъ 0 до 30 градусовъ, мы можемъ получить синусы и косинусы дугъ, содержащихся между 30 и 45 градусами, посредствомъ простого вычитанія.

Въ самомъ дѣлѣ, припоминая, что $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, пишемъ (§ 18):

$$\sin(30^0 + x) + \sin(30^0 - x) = \cos x,$$
$$\cos(30^0 - x) - \cos(30^0 + x) = \sin x,$$

откуда

$$\sin(30^0 + x) = \cos x - \sin(30^0 - x),$$
$$\cos(30^0 + x) = \cos(30^0 - x) - \sin x;$$

изъ этихъ формулъ, при помощи небольшаго вычисленія, мы получимъ синусы и косинусы дугъ выше 30 градусовъ, если извѣстны синусы и косинусы дугъ ниже 30 градусовъ, что значительно сокращаетъ работу составленія Таблицы.

Изложенный пріемъ былъ примѣненъ учевыми при первомъ составленіи Таблицъ синусовъ и косинусовъ. Анализъ далъ уже методы болѣе выгодные, заключающіеся въ употребленіи *разностей* и основанные на формулахъ, выражающихъ синусы и косинусы въ функціи отъ дуги. Мы выведемъ эти формулы въ *Дополненіи* [1]).

*Таблицы логариѳмовъ круговыхъ функцій.*

**§ 53.** Въ численныхъ приложеніяхъ всегда производятъ дѣйствія надъ логариѳмами: нужно ли будетъ узнавать логариѳмы синусовъ, косинусовъ, и т. д., или же самыя тригонометрическія линіи. Такъ какъ синусы и косинусы дугъ черезъ каждыя 10 секундъ уже вычислены, то можно составить Таблицу ихъ логариѳмовъ. Такая Таблица, разъ составленная, даетъ Таблицу логариѳмовъ тангенсовъ и котангенсовъ по формуламъ:

$$\log \operatorname{tang} x = \log \sin x - \log \cos x,$$
$$\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x.$$

[1]) См. Серре (J.-A.). *Дополненіе къ „Теоріи круговыхъ функцій“*. Пер. М. В. Пирожкова. Спб. 1902 г.

Что касается секансовъ и косекансовъ, то они не употребляются, да и кромѣ того ихъ логариѳмы равны, но противоположны по знаку, логариѳмамъ косинусовъ и синусовъ [1]).

Изъ Таблицъ логариѳмовъ синусовъ, косинусовъ, и т. д. наиболѣе употребительны таблицы Каллета; сейчасъ мы покажемъ ихъ расположеніе и употребленіе, но предварительно сдѣлаемъ одно важное замѣчаніе.

Синусы и косинусы дугъ отъ 0 до 90 градусовъ, тангенсы дугъ отъ 0 до 45 градусовъ и котангенсы дугъ отъ 45 до 90 градусовъ меньше единицы,—поэтому ихъ логариѳмы отрицательны. Въ Таблицахъ Каллета во избѣжаніе отрицательныхъ характеристикъ, которыя, однако, весьма удобны и желательны при вычисленіяхъ, вездѣ прибавлено по 10 къ отрицательнымъ логариѳмамъ; поэтому, всегда нужно отбрасывать эти 10 единицъ.

### *Расположеніе Таблицъ Каллета.*

**§ 54.** Первая изъ этихъ Таблицъ содержитъ логариѳмы синусовъ и тангенсовъ черезъ каждую секунду для первыхъ пяти градусовъ съ семью цифрами послѣ запятой; но такъ какъ синусъ или тангенсъ дуги есть въ то же время косинусъ или котангенсъ его дополненія, то эта Таблица даетъ также логариѳмы косинусовъ и котангенсовъ дугъ выше 85 градусовъ.

Градусы проставлены вверху и внизу на каждой страницѣ; минуты занимаютъ первую и послѣднюю строку, секунды—первый и послѣдній столбецъ. Каждая лѣвая страница содержитъ только синусы и косинусы, а каждая правая — только тангенсы и котангенсы, какъ показываютъ заглавія на этихъ страницахъ.

Слѣдующія Таблицы содержатъ логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ черезъ каждыя 10 секундъ для всѣхъ градусовъ четверти круга. Здѣсь также градусы проставлены вверху и внизу на каждой страницѣ; минуты и секунды въ первыхъ двухъ столбцахъ слѣва относятся къ градусамъ, проставленнымъ наверху,

---

[1]) Въ *Дополненіи къ „Теоріи круговыхъ функцій“* (Пер. М. В. Пирожкова. Спб. 1902 г.) будутъ даны формулы, при помощи которыхъ можно вычислить прямо и съ желаемымъ приближеніемъ логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ всѣхъ дугъ.

а минуты и секунды въ двухъ послѣднихъ столбцахъ справа относятся къ градусамъ, проставленнымъ внизу.

Третій столбецъ содержитъ логариѳмы синусовъ дугъ, градусы которыхъ проставлены на верху страницы, а минуты и секунды въ первомъ и во второмъ столбцѣ. Третій столбецъ озаглавленъ *sinus*, но надо читать *логариѳмы синусовъ*. То же относится и къ другимъ столбцамъ. Четвертый столбецъ содержитъ разности логариѳмовъ синусовъ, какъ показываетъ самое заглавіе; каждое число этого столбца приходится между числами предыдущаго и выражаетъ разность тѣхъ двухъ логариѳмовъ, между которыми оно стоитъ. Столбцы пятой и шестой содержатъ логариѳмы косинусовъ тѣхъ же дугъ и ихъ разности; столбцы седьмой и восьмой содержатъ логариѳмы тангенсовъ и ихъ разности; наконецъ, девятый столбецъ содержитъ логариѳмы котангенсовъ тѣхъ же дугъ; ихъ разности будутъ такія же, какъ и для логариѳмовъ тангенсовъ [1]),— поэтому столбецъ, содержащій ихъ, озаглавленъ *differences communes* (общія разности).

Если обратить вниманіе только на градусы, проставленные вверху на каждой страницѣ, то можно подумать, что Таблицы идутъ только до 45 градусовъ. Но, съ другой стороны, мы замѣчаемъ, что каждый столбецъ имѣетъ два заглавія: тотъ, который вверху имѣетъ заглавіе *sinus*. внизу помѣченъ словомъ *cosinus*; помѣченный же вверху словомъ *cosinus*, внизу озаглавленъ словомъ *sinus*; то же относится къ тангенсамъ и котангенсамъ; слѣдовательно, читая градусы и названія, проставленныя внизу на каждой страницѣ, а минуты и секунды—въ двухъ послѣднихъ столбцахъ справа тѣхъ же страницъ, мы получимъ логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ градусовъ, минутъ и секундъ отъ 45 до 90 градусовъ.

---

[1]) Дѣйствительно, такъ какъ

$$\frac{\operatorname{tang}(x+h)}{\operatorname{tang} x} = \frac{\cot x}{\cot(x+h)},$$

то, взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей этого равенства, найдемъ:

$$\log \operatorname{tang}(x+h) - \log \operatorname{tang} x = \log \cot x - \log \cot(x+h).$$

*Употребленіе Таблицъ.*

**§ 55. Задача I.** — *Зная число градусовъ, минутъ и секундъ, содержащихся въ нѣкоторой дугѣ, меньшей 90 градусовъ, найти логариѳмъ синуса, косинуса, тангенса или котангенса этой дуги.*

**Первый случай.**—Если данное число состоитъ изъ градусовъ, минутъ и десятковъ секундъ, то ищемъ сначала число градусовъ вверху или внизу страницъ: вверху, если это число меньше 45 градусовъ, и внизу, если оно больше. Далѣе, переходимъ, если число градусовъ взято сверху, къ первому столбцу, увеличивающемуся сверху внизъ, а если число градусовъ взято снизу, то переходимъ къ послѣднему столбцу, увеличивающемуся снизу вверхъ, и смотримъ по направленію возрастанія, пока не встрѣтимъ числа данныхъ минутъ. Наконецъ, разыскиваемъ въ томъ же направленіи, но въ столбцѣ секундъ, отправляясь отъ найденныхъ минутъ, данные десятки секундъ и въ одной строкѣ съ этими послѣдними находимъ искомый логариѳмъ синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Пусть, напр., требуется найти логариѳмъ тангенса $79^0 51' 40''$; 79 градусовъ отыскиваемъ внизу страницы, затѣмъ подымаемся вдоль послѣдняго столбца, увеличивающагося снизу вверхъ, пока не встрѣтимъ 51, числа данныхъ минутъ; послѣ этого переходимъ къ предыдущему столбцу, въ которомъ помѣщены десятки секундъ и продолжаемъ подыматься вдоль этого послѣдняго, пока не встрѣтимъ 40 секундъ; въ одной строкѣ съ этими послѣдними и въ столбцѣ, помѣченномъ внизу словомъ *tangente* (тангенсъ), находимъ 0,7475657. Это и есть искомый логариѳмъ. Такимъ образомъ,

$$\log \operatorname{tang} (79^0 51' 40'') = 0{,}7475657.$$

Пусть еще требуется найти логариѳмъ синуса $2^0 24' 50''$; 2 градуса отыскиваемъ наверху страницы, затѣмъ спускаемся вдоль перваго столбца, увеличивающагося къ низу, пока не встрѣтимъ 24, числа данныхъ минутъ; послѣ этого переходимъ къ слѣдующему столбцу, въ которомъ помѣщены десятки секундъ, и продолжаемъ спускаться вдоль этого послѣдняго, пока не встрѣтимъ 50 секундъ въ одной строкѣ съ этими послѣдними и въ столбцѣ, помѣченномъ наверху словомъ *sinus* (синусъ), находимъ 8,6244662. Это есть искомый логариѳмъ, увеличенный на 10 единицъ. Такимъ образомъ,

$$\log \sin (2^0 24' 50'') = \bar{2}{,}6244662.$$

**Второй случай.** — Если данное число сверхъ того содержитъ единицы секундъ и дроби секунды, то мы начинаемъ съ обращенія дробей секунды въ десятичную дробь, затѣмъ ищемъ, какъ только-что объяснено, логариѳмъ синуса или тангенса данной дуги, не обращая вниманія на единицы и десятичныя дроби секунды, что все вмѣстѣ обозначимъ черезъ $h$. Далѣе, беремъ разность $\Delta$ между найденнымъ логариѳмомъ и непосредственно слѣдующимъ за нимъ, идя сверху внизъ или снизу вверхъ, смотря по тому направленію, въ какомъ мы шли, отыскивая взятый логариѳмъ. Наконецъ, складываемъ этотъ послѣдній съ числомъ $\Delta'$, опредѣляемымъ изъ уравненія:

$$\frac{h}{10} = \frac{\Delta'}{\Delta}, \text{ откуда } \Delta' = \frac{h\Delta}{10},$$

и получаемъ искомый логариѳмъ. Числа $\Delta'$ и $\Delta$ выражаютъ здѣсь единицы седьмого порядка послѣ запятой; поэтому мы беремъ для $\Delta'$ цѣлую часть отъ произведенія $\frac{\Delta}{10} \times h$; эту цѣлую часть слѣдуетъ увеличивать на одну единицу всякій разъ, когда отбрасываемая дробь больше 0,5.

Если требуется найти логариѳмъ косинуса или котангенса данной дуги, то увеличиваютъ на одинъ десятокъ число секундъ дуги и, отбросивъ единицы и дроби секунды, получаютъ дугу, которая превосходитъ данную на нѣкоторое число $h$ секундъ, выраженное въ десятичныхъ дробяхъ; затѣмъ ищутъ логариѳмъ ея косинуса или котангенса и къ результату прибавляютъ $\frac{h\Delta}{10}$, гдѣ $\Delta$ есть разность между взятымъ логариѳмомъ и непосредственно ему предшествующимъ сверху или снизу, смотря по тому направленію, въ какомъ шли, отыскивая взятый логариѳмъ.

Только-что изложенное правило основано на слѣдующемъ принципѣ:

*Если придать какой-угодно дугѣ въ послѣдовательномъ порядкѣ два малыхъ приращенія, то соотвѣтственныя приращенія* log sin, log cos, . . . *почти пропорціональны приращеніямъ дуги.*

Этотъ принципъ не строго точенъ, но, прилагая его, мы получаемъ достаточное приближеніе, исключая случай, который мы изслѣдуемъ ниже. Изложенный принципъ можно повѣрить посредствомъ самихъ же Таблицъ; въ самомъ дѣлѣ, изъ нихъ мы усматриваемъ, что разности logsin, или logcos, или . . . почти постоянны

на довольно большомъ протяженіи, кромѣ начала Таблицъ; отсюда слѣдуетъ, что при равныхъ приращеніяхъ, придаваемыхъ нѣкоторой дугѣ, логариѳмъ синуса, косинуса, . . . этой дуги будетъ принимать почти равныя приращенія.

Покажемъ на примѣрахъ, какъ производятся вычисленія.

1. *Найти логариѳмъ* $\sin(49^\circ 53' 24'',3)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{Log}\sin(49^\circ 53' 20'') = \bar{1},8835459$ | | | $\Delta = 177$ |
| Для | $4'',3$ | 76 | $17,7 \times 4,3 = 76,11$ |
| $\operatorname{Log}\sin(49^\circ 53' 24'',3) = \bar{1},8835535$ | | | |

2. *Найти логариѳмъ* $\cos(36^\circ 35' 36'',3)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{Log}\cos(36^\circ 35' 40'') = \bar{1},9046481$ | | | $\Delta = 156$ |
| Для | $3'',7$ | 58 | $15,6 \times 3,7 = 57,72$ |
| $\operatorname{Log}\cos(36^\circ 35' 36'',3) = \bar{1},9046539$ | | | |

3. *Найти логариѳмъ* $\operatorname{tang}(79^\circ 51' 47'',2)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{Log}\operatorname{tang}(79^\circ 51' 40'') = 0,7475657$ | | | $\Delta = 1215$ |
| Для | $7'',2$ | 875 | $121,5 \times 7,2 = 874,80$ |
| $\operatorname{Log}\operatorname{tang}(79^\circ 51' 47'',2) = 0,7476532$ | | | |

4. *Найти логариѳмъ* $\cot(23^\circ 17' 22'',3)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{Log}\cot(23^\circ 17' 30'') = 0,3660313$ | | | $\Delta = 580$ |
| Для | $7'',7$ | 447 | $58 \times 7,7 = 446,60$ |
| $\operatorname{Log}\cot(23^\circ 17' 22'',3) = 0,3660760$ | | | |

**Третій случай.** — Если табличныя разности измѣняются быстро, что случается тогда, когда данная дуга очень мала, то предыдущій методъ уже не вноситъ достаточной точности. Вотъ какъ нужно поступать въ такомъ случаѣ. Такъ какъ данная дуга выражена въ секундахъ и въ десятичной дроби секунды, то пусть $a$ будетъ цѣлая часть, а $h$ — дробная; чтобы получить $\log\sin(a+h)$ и $\log\operatorname{tang}(a+h)$, можно допустить, что отношеніе весьма малыхъ дугъ $a$ и $a+h$ ревно отношенію синусовъ или тангенсовъ этихъ дугъ, т.-е. что

$$\frac{\sin(a+h)}{\sin a} = \frac{a+h}{a}, \qquad \frac{\operatorname{tang}(a+h)}{\operatorname{tang} a} = \frac{a+h}{a}.$$

Отсюда

$$\log \sin\ (a+h) = \log\ \sin\ a + \log(a+h) - \log a,$$
$$\log \operatorname{tang}(a+h) = \log \operatorname{tang} a + \log(a+h) - \log a.$$

Беремъ, теперь, $\log \sin a$ или $\log \operatorname{tang} a$ изъ первой части Таблицы, а $\log(a+h)$ и $\log a$ — изъ Таблицы логариѳмовъ чиселъ, послѣ чего находимъ по предыдущимъ формуламъ $\log\sin(a+h)$ и $\log\operatorname{tang}(a+h)$.

Пусть, напр., требуется найти логариѳмъ синуса $0^0 3' 27'',355$: эта дуга въ секундахъ равна $207'',355$; слѣдовательно, $a = 207$, $h = 0{,}355$. Логариѳмъ $\sin(3' 27'')$ есть $\bar{3}{,}0015451$; логариѳмъ $207{,}355$ есть $2{,}3167145$; логариѳмъ 207, взятый со знакомъ —, есть $\bar{3}{,}6840297$; складывая всѣ эти три логариѳма, находимъ:

$$\log \sin(0^0 3' 27'',355) = \bar{3}{,}0022893.$$

Если требуется найти логариѳмъ котангенса весьма малой дуги, то нужно искать логариѳмъ тангенса, какъ только-что показано, и затѣмъ измѣнить знакъ у этого логариѳма.

Если идетъ дѣло о $\log\cos$ весьма малой дуги $(a+h)$, то пишемъ:

$$\log\cos(a+h) = \log\sin(a+h) - \log\operatorname{tang}(a+h);$$

опредѣливъ, какъ показано выше, $\log\sin(a+h)$ и $\log\operatorname{tang}(a+h)$, мы получимъ по этой формулѣ $\log\cos(a+h)$; ее мы можемъ преобразовать, пользуясь уравненіями, написанными выше, въ слѣдующую формулу:

$$\log\cos(a+h) = \log\sin a - \log\operatorname{tang} a = \log\cos a.$$

Отсюда слѣдуетъ, что дуги $a+h$ и $a$ имѣютъ $\log\cos$ почти равные. Впрочемъ, это видно изъ Таблицъ. Предположимъ, что требуется найти $\log\cos 0^0 3' 27'',355$; эта дуга заключена между дугами $3' 20''$ и $3' 30''$, косинусы которыхъ имѣютъ одинъ и тотъ же логариѳмъ $\bar{1}{,}9999998$; слѣдовательно,

$$\log\cos(0^0 3' 27'',355) = \bar{1}{,}9999998.$$

**§ 56. Задача II.** — *По данному логариѳму синуса, косинуса, тангенса или котангенса найти число градусовъ, минутъ и секундъ соотвѣтствующей дуги.*

**Первый случай.** — Ищемъ данный логариѳмъ въ какомъ-нибудь изъ двухъ столбцовъ, озаглавленныхъ тою тригонометрическою линіею, логариѳмъ которой заданъ. Если послѣдній находится въ Таблицахъ, то замѣчаемъ, на какомъ концѣ столбца, верхнемъ или нижнемъ, находится названіе данной тригонометрической линіи: если—вверху, то смотримъ на второй столбецъ слѣва и въ одной строкѣ съ логариѳмомъ находимъ число десятковъ секундъ искомой дуги. Далѣе, переходимъ къ первому столбцу и если въ немъ встрѣтится въ той же строкѣ число, то это послѣднее покажетъ искомыя минуты, если же нѣтъ, то подымаемся вдоль этого столбца и первое встрѣтившееся число дастъ намъ искомыя минуты; наконецъ, вверху страницы находимъ число градусовъ. Но если названіе заданной функціи находится внизу, то нужно обратиться къ предпослѣднему столбцу справа, который дастъ намъ секунды, и затѣмъ перейти къ послѣднему столбцу, въ которомъ мы найдемъ искомыя минуты или въ одной и той же строкѣ съ секундами, или же спускаясь вдоль этого столбца. Наконецъ, внизу стреницы мы отыщемъ число градусовъ.

Пусть, напр., требуется найти число градусовъ, минутъ и секундъ дуги, $\log\sin$ которой есть $\overline{1},3541803$. Ищемъ этотъ логариѳмъ въ одномъ изъ двухъ столбцовъ, озаглавленныхъ словомъ *sinus*, не разбирая, будетъ ли это слово стоять вверху, или внизу. Находимъ нашъ логариѳмъ 9,3541803 въ столбцѣ, озаглавленномъ сверху словомъ *sinus*, и въ одной строкѣ съ нимъ, во второмъ столбцѣ слѣва, число 50. Далѣе, переходимъ къ первому столбцу и, не находя въ немъ на той же строкѣ никакого числа, подымаемся по этому столбцу вверхъ: встрѣчаемъ число 3. Наконецъ, вверху страницы находимъ 13 градусовъ. Итакъ, искомое числоесть $13^\circ 3' 50''$.

**Второй случай.** — Если данный логариѳмъ не находится въ Таблицахъ, что чаще всего и случается, то ищемъ два логариѳма, между которыми онъ содержится, и изъ нихъ выбираемъ ближайшій къ заданному заглавію столбца; этотъ послѣдній вычитаемъ изъ даннаго логариѳма, или наоборотъ, смотря по тому, который изъ нихъ больше; такимъ образомъ у насъ получается разность $\Delta'$; называя черезъ $\Delta$ *табличную* разность тѣхъ двухъ логариѳмовъ, между которыми содержится данный, мы для опредѣленія числа $h$ составимъ уравненіе:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{h}{10}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{10\Delta'}{\Delta}.$$

Число $h$ меньше 10 и выразить единицы секундъ и части секунды искомой дуги. Что касается градусовъ, минутъ и десятковъ секундъ, то мы ихъ получимъ, отыскивая по Таблицѣ такъ, какъ указано въ предыдущемъ случаѣ, число градусовъ, минутъ и секундъ, соотвѣтствующее тому логариему, который отличается отъ нашего на $\Delta'$. Покажемъ ходъ вычисленій на примѣрахъ.

1. *Найти дугу*, logsin *которой есть* $\bar{1},8835535$.

$\mathrm{Log\,sin}\,x = \bar{1},8835535$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Для | 1,8835459 | $49^0 53' 20''$ | $\Delta = 177$ |
| $\Delta' \times 10$ | 760 | $4'',29$ | |
| | | $x = 49^0 53' 24'',29$ | |

2. *Найти дугу*, logcos *которой есть* $\bar{1},9046539$.

$\mathrm{Log\,cos}\,x = \bar{1},9046539$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Для | 1,9046637 | $36^0 35' 30''$ | $\Delta = 156$ |
| $\Delta' \times 10$ | 980 | $6'',3$ | |
| | | $x = 36^0 35' 36'',3$ | |

3. *Найти дугу*, logtang *которой есть* 0,7476532.

$\mathrm{Log\,tang}\,x = 0,7476532$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Для | 0,7475657 | $79^0 51' 40''$ | $\Delta = 1215$ |
| $\Delta' \times 10$ | 8750 | $7'',2$ | |
| | | $x = 79^0 51' 47'',2$ | |

4. *Найти дугу*, logcot *которой есть* 0,3660760.

$\mathrm{Log\,cot}\,x = 0,3660760$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Для | 0,3660892 | $23^0 17' 20''$ | $\Delta = 580$ |
| $\Delta' \times 10$ | 1320 | $2'',28$ | |
| | | $x = 23^0 17' 22'',28$ | |

**Третій случай.**—Если табличныя разности измѣняются быстро, то указанный ходъ вычисленій не годится. Такой случай является при опредѣленіи весьма малой дуги по ея logsin или по ея logtang. Вотъ какъ тогда нужно поступать. Подыскиваемъ въ первой части Таблицы логариемъ, ближайшій къ данному и обращаемъ въ секунды градусы и минуты соотвѣтственной дуги; полученное такимъ образомъ число секундъ обозначаемъ черезъ $a$, а точное число секундъ, содержащихся въ неизвѣстной дугѣ — черезъ $a+h$; это послѣднее число опредѣлится по одному изъ слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$\log(a+h) = \log \sin (a+h) - \log \sin a + \log a,$$
$$\log(a+h) = \log \operatorname{tang} (a+h) - \log \operatorname{tang} a + \log a,$$

разсмотрѣнныхъ выше, при рѣшеніи обратной задачи.

Пусть, напр., требуется найти число градусовъ, минутъ, и т. д. дуги, логариѳмъ синуса которой есть 3,0022893. Подыскиваемъ ближайшій табличный логариѳмъ: онъ равенъ $\bar{3}$,0015451, или, что то же самое, —2,9984549; этотъ логариѳмъ соотвѣтствуетъ дугѣ въ 0°3′27″, или, что одно и то же, дугѣ въ 207 секундъ; логариѳмъ 207 есть 2,3159703; складывая вмѣстѣ три числа:

$$\bar{3},0022893,$$
$$2,9984449,$$
$$2,3159703,$$

получаемъ въ суммѣ 2,3167145. Этотъ логариѳмъ соотвѣтствуетъ числу 207,355. Слѣдовательно, искомая дуга есть 207″,355, или 0°3′27″,355.

Точно такъ же поступаютъ при опредѣленіи весьма малой дуги, когда данъ логариѳмъ ея котангенса, потому что такой логариѳмъ равенъ логариѳму тангенса, взятому съ обратнымъ знакомъ.

Но когда требуется опредѣлить весьма малую дугу по данному логариѳму ея косинуса, то этого невозможно сдѣлать съ достаточною точностью. Пусть, напр., требуется узнать дугу, logcos которой есть $\bar{1}$,9999991. Изъ Таблицы видно, что заданный логариѳмъ соотвѣтствуетъ дугѣ, заключающейся между 6′45″ и 7′25″; значитъ искомая дуга можетъ быть получена съ точностью только до 40 секундъ.

**§ 57.** Рѣшеніе двухъ предыдущихъ задачъ основано на приближенномъ равенствѣ:

$$\frac{h}{10} = \frac{\Delta'}{\Delta}; \qquad (1)$$

позагаемъ:

$$\Delta' = \frac{h\Delta}{10} \pm e, \quad h = \frac{10\Delta'}{\Delta} \pm \varepsilon, \qquad (2)$$

гдѣ $e$ и $\varepsilon$ обозначаютъ тѣ ошибки, которыя мы вводимъ, вычисляя $\Delta'$ (въ первой задачѣ) и $h$ (во второй задачѣ) по формулѣ (1). Въ высшихъ частяхъ математики доказывается, что $e$ всегда меньше единицы седьмого знака послѣ запятой, если дуга, для которой вычисляется logsin или logtang. больше нѣкотораго предѣла, низ-

шаго 5 градусовъ, и слѣдовательно, то же самое относится и къ случаю, когда дуга, для которой вычисляется log cos или log cot, больше 85 градусовъ. Отсюда заключаемъ, что формула (1) вполнѣ примѣнима въ этихъ предѣлахъ при рѣшеніи второго случая первой задачи. Также доказывается, что ошибка $\varepsilon$, относящаяся ко второй задачѣ, меньше одной сотой секунды, если вычисляемая дуга отличается отъ 0 или отъ 90 градусовъ на количество бо́льшее нѣкотораго предѣла, низшаго $1\frac{1}{2}$ градусовъ, и что эта ошибка $\varepsilon$ совершенно нечувствительна, если вычисляемая дуга отстоитъ на нѣсколько градусовъ отъ предѣловъ 0 и 90 градусовъ; отсюда слѣдуетъ, что формула

$$h = \frac{10\Delta'}{\Delta}$$

вполнѣ примѣнима при рѣшеніи второго случая второй задачи между только-что указанными предѣлами [1]).

Ошибка, допускаемая при вычисленіи $h$, зависитъ только отъ отбрасываемаго количества $\varepsilon$; логариѳмы, для которыхъ $\Delta$ и $\Delta'$ слу-

---

[1]) Если обозначить черезъ $M$ модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ и черезъ $\vartheta$ нѣкоторое число между 0 и 1, то мы можемъ, принимая секунду за единицу, по извѣстной формулѣ Тэйлора (Taylor) написать:

$$\log\sin(x+h) - \log\sin x = Mh\sin 1'' \frac{\cos x}{\sin x} - M\frac{\vartheta h^2 \sin^2 1''}{2\sin^2 x}.$$

Обозначимъ черезъ $\Delta$ значеніе перваго члена при $h = 10$ и черезъ $\Delta'$ значеніе того же перваго члена при $h < 10$; назовемъ также черезъ $\vartheta$ значеніе $\vartheta$ при $h = 10$ и положимъ

$$\Delta' = \frac{h\Delta}{10} \pm e, \quad h = \frac{10\Delta'}{\Delta} \pm \varepsilon;$$

тогда изъ предыдущей формулы выводимъ:

$$e = \frac{M\sin^2 1''}{2\sin^2 x}(10\vartheta h - \vartheta h^2), \quad \pm\varepsilon = \frac{(10\vartheta - \vartheta h)h\sin 1''}{\sin 2x - \vartheta h \sin 1''}.$$

Если $h$ меньше 10, то $10\vartheta - \vartheta h$ по абсолютной величинѣ также меньше 10; слѣдовательно,

$$e < \frac{50M\sin^2 1''}{\sin^2 x}, \quad \varepsilon < \frac{100\sin 1''}{\sin 2x - 10\sin 1''}.$$

Этими формулами можно повѣрить правильность нашихъ утвержденій относительно log sin и log cos; далѣе, отсюда выводится непосредственно, что наши утвержденія также справедливы и относительно log tang.

жать разностями, всегда будутъ взяты съ нѣкоторою ошибкою и если эта ошибка остается меньше половины единицы седьмого порядка послѣ запятой для табличныхъ логариѳмовъ, то она можетъ выйти гораздо значительнѣе для даннаго логариѳма, который въ большинствѣ случаевъ является результатомъ дѣйствій надъ числами, извѣстными только приближенно. Напр., допуская, что ошибка въ $\Delta'$ есть единица порядка послѣдней цифры, заключаемъ, что ошибка въ $h$ будетъ $\frac{1}{\Delta} 10''$, если пренебречь ошибкою въ $\Delta$. Отсюда слѣдуетъ, что точность при вычисленіи дуги будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше табличныя разности; а такъ какъ разность двухъ log tang есть сумма разностей соотвѣтственныхъ log sin и log cos [1]), то, слѣдовательно, дуга будетъ всегда лучше опредѣлена по своему тангенсу, чѣмъ по синусу или косинусу. Для 45 градусовъ (для точки перваго квадранта, въ которой тангенсъ даетъ наименьшее приближеніе) табличная разность логариѳмовъ равна 421 единицамъ седьмого порядка послѣ запятой при измѣненіи дуги въ 10 секундъ; отсюда заключаемъ, что ошибка на одну единицу седьмого порядка въ логариѳмѣ тангенса соотвѣтствуетъ въ этомъ случаѣ ошибкѣ на $0'',024$ въ дугѣ. Такая же ошибка въ логариѳмѣ синуса или косинуса соотвѣтствовала бы двойной ошибкѣ, т.-е. на $0'',048$. Для малыхъ дугъ разности log cos очень малы и, слѣдовательно, разности log sin почти равны разностямъ log tang; а это значитъ, что малая дуга не могла бы быть опредѣлена съ достаточною точностью по своему косинусу, какъ мы и замѣтили выше; наоборотъ, она одинаково хорошо опредѣляется по своему синусу или по своему тангенсу. Изъ сказаннаго выводимъ, что въ тригонометрическихъ вычисленіяхъ при опредѣленіи малыхъ дугъ должно по возможности, пользоваться тангенсами и избѣгать косинусовъ

---

[1]) Разность

$$\log \operatorname{tang}(x+h) - \log \operatorname{tang} x$$

есть, очевидно, сумма двухъ разностей:

$$\log \sin(x+h) - \log \sin x,$$
$$\log \cos x - \log \cos(x+h).$$

*Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій. (Введеніе вспомогательнаго угла).*

**§ 58.** Чтобы можно было непосредственно воспользоваться логариѳмами для опредѣленія нѣкотораго численнаго выраженія, необходимо, чтобы такое выраженіе состояло только изъ одночленныхъ множителей; въ противномъ случаѣ оно является *неудобнымъ для логариѳмическихъ вычисленій.* Если выраженіе не содержитъ другихъ многочленныхъ множителей, кромѣ суммъ или разностей двухъ синусовъ, или двухъ косинусовъ, или двухъ тангенсовъ данныхъ дугъ, то разсматриваемое выраженіе мы можемъ привести къ виду, удобному для вычисленій при помощи логариѳмовъ, пользуясь формулами § 18-го; поэтому, эти послѣднія такъ важны въ Тригонометріи. Здѣсь мы укажемъ на общіе пріемы для приведенія выраженія, неудобнаго для логариѳмическихъ вычисленій, къ виду, удобному для такихъ вычисленій.

Разсмотримъ сначала двучленное выраженіе:

$$x = a \pm b;$$

пусть требуется найти $\log x$, при чемъ $a$ и $b$ суть два такихъ положительныхъ числа, относительно которыхъ даны только ихъ логариѳмы. Можно написать, что

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Далѣе, вводимъ вспомогательную дугу $\varphi$ посредствомъ равенства:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a};$$

эта дуга $\varphi$, содержащаяся между 0 и 90 градусами, вычислится по формулѣ:

$$\log \operatorname{tang}\varphi = \log b - \log a.$$

Значеніе $x$ будетъ:

$$x = a(1 \pm \operatorname{tang}\varphi) = a\,\frac{\cos\varphi \pm \sin\varphi}{\cos\varphi};$$

но такъ какъ

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi = \cos\varphi \pm \cos(90^0 - \varphi) =$$
$$= 2\cos 45^0 \cos(\varphi \mp 45^0) = \sqrt{2}\cos(\varphi \mp 45^0),$$

то

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos(\varphi \mp 45^\circ)}{\cos\varphi}.$$

Эта формула удобна для вычисленій съ помощью логариѳмовъ; въ самомъ дѣлѣ,

$$\log x = \log a + \frac{1}{2}\log 2 + \log\cos(\varphi \mp 45^\circ) - \log\cos\varphi. \quad ^1)$$

Тотъ же самый методъ прилагается къ какому-угодно многочленному выраженію $a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$; дѣйствительно, можно, вводя вспомогательную дугу, уменьшить на единицу число членовъ многочленнаго выраженія; вводя вторую вспомогательную дугу, мы уменьшимъ это число еще на одну единицу, и такъ мы можемъ продолжать до тѣхъ поръ, пока преобразованное выраженіе не представитъ одночлена.

Предыдущее преобразованіе не единственное, которымъ пользуются въ такихъ случаяхъ; мы укажемъ еще на слѣдующія.

Приведемъ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій, формулу $a + b$, гдѣ $a$ и $b$ обозначаютъ положительныя числа, и для этого положимъ $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2\varphi$; тогда

$$a + b = a(1 + \operatorname{tang}^2\varphi) = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Если $a > b$, то формулу $a - b$ мы приведемъ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій, положивъ $b = a\sin^2\varphi$; тогда

$$a - b = a(1 - \sin^2\varphi) = a\cos^2\varphi.$$

---

[1]) Если въ формулѣ встрѣчаются логариѳмы со знакомъ —, то слѣдуетъ преобразовать ихъ такъ, чтобы мантиссы вышли бы отрицательными. Напр., если логариѳмъ $\bar{3},3554207$ долженъ быть вычтенъ изъ суммы другихъ логариѳмовъ, то нужно его переписать въ видѣ $-2,6445793$; тогда вычитаніе сведется къ сложенію съ $2,6445793$; поступить по этому способу значитъ взять дополненіе логариѳма до 10 и вычесть 10 изъ характеристики.

*Рѣшеніе уравненія второй степени при помощи Тригонометрическихъ таблицъ.*

**§ 59.** Оба корня уравненія второй степени:

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

опредѣляются по формулѣ:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}; \qquad (2)$$

предположимъ, что коэффиціенты $p$ и $q$ — вещественныя количества, заданныя или непосредственно, или черезъ свои логариѳмы.

1. Пусть $\frac{p^2}{4}-q>0$; въ этомъ случаѣ корни вещественные и неравные. Если при этомъ $q>0$, то полагаемъ

$$\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi};$$

вспомогательная дуга $\varphi$, заключающаяся между $-90$ и $+90$ градусами, вычисляется по формулѣ:

$$\log(-\sin\varphi)=\log 2+\frac{1}{2}\log q-\log p,$$

если $p$ положительно, и по формулѣ:

$$\log\sin\varphi=\log 2+\frac{1}{2}\log q-\log(-p),$$

если $p$ отрицательно. Формула (2) перейдетъ тогда въ слѣдующую

$$x=\sqrt{q}\left(\frac{1\pm\cos\varphi}{\sin\varphi}\right);$$

иначе говоря, корни $x_1$ и $x_2$ будутъ:

$$x_1=\sqrt{q}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi, \qquad x_2=\sqrt{q}\cot\frac{1}{2}\varphi;$$

эти выраженія удобны для вычисленій съ помощью логариѳмовъ.

Если $q<0$, то полагаемъ

$$\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{-q}}{\operatorname{tang}\varphi};$$

вспомогательная дуга $\varphi$, заключающаяся между $-90$ и $+90$ градусами, вычислится по формулѣ:

$$\log(-\operatorname{tang}\varphi)=\log 2+\frac{1}{2}\log(-q)-\log p,$$

если $p$ положительно, и по формулѣ:

$$\log\operatorname{tang}\varphi=\log 2+\frac{1}{2}\log(-q)-\log(-p),$$

если $p$ отрицательно. Формула (2) перейдетъ тогда въ слѣдующую:

$$x=\sqrt{-q}\left(\frac{\cos\varphi\pm 1}{\sin\varphi}\right);$$

иначе говоря, корни $x_1$ и $x_2$ будутъ:

$$x_1=-\sqrt{-q}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi,\quad x_2=+\sqrt{-q}\cot\frac{1}{2}\varphi.$$

2. Пусть, теперь, $\frac{p^2}{4}-q<0$. Въ такомъ случаѣ можно положить

$$q=\frac{p^2}{4}\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

и вспомогательная дуга $\varphi$ опредѣлится по формулѣ:

$$\log\cos\varphi=\log(\pm p)-\frac{1}{2}\log q-\log 2;$$

формула (2) перейдетъ тогда въ слѣдующую:

$$x=-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1};$$

вещественная часть обоихъ мнимыхъ корней есть $-\frac{p}{2}$, а логариѳмъ коэффиціента при $\sqrt{-1}$ равенъ

$$\log(\pm p)+\log\operatorname{tang}\varphi-\log 2.$$

**§ 60.** Можно свести на рѣшеніе уравненія второй степени задачу о нахожденіи всѣхъ дугъ $x$, удовлетворяющихъ уравненію вида:

$$a\cos x + b\sin x = c,$$

гдѣ $a$, $b$ и $c$ обозначаютъ данныя, положительныя или отрицательныя, числа; въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно выразить $\sin x$ и $\cos x$ въ функціи отъ одной и той же тригонометрической линіи. Однако, эта задача можетъ быть рѣшена значительно проще слѣдующимъ образомъ. Введемъ вспомогательную дугу $\varphi$, заключающуюся между $-90$ и $+90$ градусами, посредствомъ слѣдующаго равенства:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a};$$

подставляя $a\operatorname{tang}\varphi$ вмѣсто $b$ въ данное уравненіе, получаемъ:

$$a(\cos x + \operatorname{tang}\varphi \sin x) = c,$$

или

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a}.$$

Чтобы предложенная задача была возможна, необходимо, чтобы $\frac{c\cos\varphi}{a}$ заключалось между $-1$ и $+1$, т.-е. чтобы

$$\frac{c^2\cos^2\varphi}{a^2} < 1, \text{ или } c^2 < a^2 + b^2.$$

Если это условіе выполнено, то по Таблицамъ мы найдемъ такую дугу $\alpha$, заключающуюся между 0 и 180 градусами, косинусъ которой равенъ $\frac{c\cos\varphi}{a}$; послѣ этого корни даннаго уравненія опредѣлятся по формулѣ:

$$x = k.360^0 + \varphi \pm \alpha,$$

гдѣ $k$ обозначаетъ произвольное цѣлое число, положительное, нуль или отрицательное.

Можно выразить всѣ корни $x$ въ функціи какого-нибудь одного изъ нихъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ $x_0$ одинъ изъ этихъ корней; тогда

$$\alpha = \pm(k'.360^0 + \varphi - x_0),$$

гдѣ $k'$ есть цѣлое число, и общее выраженіе корней будетъ:

$$x = k \cdot 360^0 + \varphi \pm (\varphi - x_0);$$

эта формула равносильна двумъ слѣдующимъ:

$$x = k \cdot 360^0 + x_0.$$
$$x = k \cdot 360^0 + 2\varphi - x_0.$$

*Рѣшеніе уравненія третьей степени при помощи Тригонометрическихъ таблицъ.*

**§ 61.** Общее уравненіе третьей степени:

$$X^3 + PX^2 + QX + R = 0 \qquad (1)$$

приводится къ виду:

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (2)$$

если положить $X = -\frac{P}{3} + x$; поэтому можно ограничиться разсмотрѣніемъ уравненія (2). Предполагаемъ, что коэффиціенты его вещественны; мы видѣли (**§ 29**), что уравненіе:

$$z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{\cos\varphi}{4} = 0 \qquad (3)$$

имѣетъ корни:

$$\cos\frac{\varphi}{3}, \quad \cos\left(120^0 + \frac{\varphi}{3}\right), \quad \cos\left(240^0 + \frac{\varphi}{3}\right);$$

слѣдовательно, если намъ удастся привести уравненіе (2) къ виду (3), то задача, которую мы себѣ поставили, будетъ рѣшена. Полагаемъ $x = \lambda z$; тогда уравненіе (2) приметъ видъ:

$$z^3 + \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0 \qquad (4)$$

и совпадетъ съ уравненіемъ (3), если количество $\lambda$ и дугу $\varphi$ опредѣлить такъ, чтобы

$$\frac{p}{\lambda^2} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{q}{\lambda^3} = -\frac{\cos\varphi}{4};$$

отсюда

$$\lambda = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad \cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}.$$

Эти значенія $\lambda$ и $\cos\varphi$ будутъ вещественными только при условіи, что $p$ отрицательно; кромѣ того, необходимо еще, чтобы $\cos^2\varphi$ было меньше 1, т.-е. чтобы

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0, \quad \text{или} \quad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Послѣднее условіе содержитъ въ себѣ первое: $p < 0$. Если оно удовлетворено, то тождественность уравненій (3) и (4) является возможною; тогда дуга $\varphi$ вычислится по формулѣ:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3},$$

и корни: $x_1$, $x_2$, $x_3$ заданнаго уравненія (2) будутъ:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(120^0 + \frac{\varphi}{3}\right),$$
$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(240^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Только-что разобранный случай есть именно тотъ случай, когда корни уравненія (1) вещественны и неравны; всякій разъ два изъ этихъ корней будутъ равными, если

$$4p^3 + 27q^2 = 0;$$

предыдущее рѣшеніе существуетъ и въ этомъ случаѣ.

**§ 62.** Разсмотримъ теперь случай, когда

$$4p^3 + 27q^2 > 0,$$

т.-е. когда уравненіе (2) не можетъ быть болѣе приведено къ виду (3) посредствомъ указаннаго преобразованія.

Пусть сначала $p = 0$ и $q = -1$; тогда уравненіе (2) приметъ видъ:

$$x^3 - 1 = 0$$

и значенія $x$ будутъ кубическими корнями изъ единицы; чтобы ихъ найти, замѣтимъ, что $x^3-1$ есть произведеніе множителей: $x-1$ и $x^2+x+1$ и, слѣдовательно, единица имѣетъ три кубическихъ корня, изъ которыхъ одинъ равенъ 1, а два другихъ, $\alpha$ и $\beta$, суть корни уравненія второй степени:

$$x^2+x+1=0;$$

рѣшая его, находимъ:

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad \beta=\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

кромѣ того, на основаніи соотношеній:

$$\alpha\beta=1,\quad \alpha^3=1,\quad \beta^3=1,$$

заключаемъ, что

$$\alpha=\beta^2 \text{ и } \beta=\alpha^2,$$

а это значитъ, что каждый изъ двухъ мнимыхъ кубическихъ корней изъ единицы есть квадратъ другого.

Вернемся теперь къ общему случаю и предположимъ сначала $p<0$, а потомъ $p>0$.

1. Пусть $p<0$; полагаемъ

$$x=\lambda(a\operatorname{tang}\varphi+b\cot\varphi),$$

гдѣ $a$ и $b$ обозначаютъ количества, соотвѣтственно равныя мнимымъ кубическимъ корнямъ, $\alpha$ и $\beta$, изъ единицы, или же оба равныя единицѣ. Возвышаемъ въ кубъ:

$$x^3=\lambda^3[\operatorname{tang}^3\varphi+\cot^3\varphi+3(a\operatorname{tang}\varphi+b\cot\varphi)]$$

и изъ двухъ послѣднихъ уравненій выводимъ:

$$x^3-3\lambda^3x-\lambda^3(\operatorname{tang}^3\varphi+\cot^3\varphi)=0. \qquad (5)$$

Изъ самаго способа, по которому составлено уравненіе (5), очевидно, что его три корня суть слѣдующіе:

$$\lambda(\operatorname{tang}\varphi+\cot\varphi),\quad \lambda(\alpha\operatorname{tang}\varphi+\beta\cot\varphi),\quad \lambda(\beta\operatorname{tang}\varphi+\alpha\cot\varphi), \qquad (6)$$

и, слѣдовательно, уравненіе (2) будетъ рѣшено, если намъ удастся привести его къ уравненію (5). Для этого достаточно опредѣлить $\lambda$ и $\varphi$ такимъ образомъ, чтобы

$$-3\lambda^2 = p, \quad -\lambda^3(\operatorname{tang}^3\varphi + \cot^3\varphi) = q;$$

первое изъ этихъ уравненій даетъ

$$\lambda = \sqrt{\frac{-p}{3}},$$

а затѣмъ, изъ второго, вытекаетъ:

$$\operatorname{tang}^3\varphi + \cot^3\varphi = -\frac{-q}{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3}.$$

Чтобы найти $\varphi$, мы введемъ вторую вспомогательную дугу $\psi$ посредствомъ уравненія:

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}^3\varphi;$$

тогда

$$\operatorname{tang}\psi + \cot\psi = \frac{2}{\sin 2\psi} = \frac{-q}{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3},$$

откуда

$$\sin 2\psi = -\frac{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3}{\frac{1}{2}q};$$

изъ этого уравненія можно получить значеніе $\psi$, содержащееся между $-45$ и $+45$ градусами; дѣйствительно, такъ какъ, по предположенію, $4p^3 + 27q^2 > 0$, то предыдущее значеніе $\sin 2\psi$ содержится между $-1$ и $+1$; далѣе, мы найдемъ значеніе $\varphi$, заключающееся также между $-45$ и $+45$ градусами, по формулѣ:

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\psi}.$$

Итакъ, когда дуги $\varphi$ и $\psi$ такимъ образомъ вычислены, выраженія (6) явятся корнями уравненія (2) и послѣ замѣны $\alpha$ и $\beta$ ихъ значеніями, написанными выше, примутъ видъ:

$$\sqrt{\frac{-p}{3}}\,(\operatorname{tang}\varphi + \cot\varphi),$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-p}{3}}\,(\operatorname{tang}\varphi + \cot\varphi) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-p}\,(\operatorname{tang}\varphi - \cot\varphi)\sqrt{-1},$$

или

$$\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin 2\varphi} \text{ и } \frac{-\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin 2\varphi} \pm \sqrt{-p}\cot 2\varphi\sqrt{-1}.$$

По Таблицамъ, при помощи этихъ формулъ, можно вычислить какъ вещественный корень, такъ и коэффиціентъ при $\sqrt{-1}$ въ мнимыхъ корняхъ.

2. Пусть $p>0$; полагаемъ

$$x = \lambda(a\,\mathrm{tang}\,\varphi - b\cot\varphi),$$

гдѣ $a$ и $b$, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, обозначаютъ два количества, соотвѣтственно равныхъ мнимымъ кубическимъ корнямъ, $\alpha$ и $\beta$, изъ единицы, или равныхъ, каждое въ отдѣльности, единицѣ; возвышая въ кубъ, находимъ:

$$x^3 = \lambda^3[\mathrm{tang}^3\varphi - \cot^3\varphi - 3(a\,\mathrm{tang}\,\varphi - b\cot\varphi)],$$

откуда

$$x^3 + 3\lambda^2 x - \lambda^3(\mathrm{tang}^3\varphi - \cot^3\varphi) = 0; \qquad (7)$$

корни этого уравненія суть слѣдующіе:

$$\lambda(\mathrm{tang}\,\varphi - \cot\varphi),\ \lambda(\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi - \beta\cot\varphi),\ \lambda(\beta\,\mathrm{tang}\,\varphi - \alpha\cot\varphi). \qquad (8)$$

Чтобы уравненіе (2) могло быть приведено къ уравненію (7), необходимо и достаточно, чтобы

$$3\lambda^2 = p, \quad -\lambda^3(\mathrm{tang}^3\varphi - \cot^3\varphi) = q;$$

первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$\lambda = \sqrt{\frac{p}{3}},$$

а затѣмъ изъ *второго* вытекаетъ:

$$\mathrm{tang}^3\varphi - \cot^3\varphi = -\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}.$$

Для нахожденія $\varphi$ мы введемъ эторую вспомогательную дугу $\psi$ посредствомъ уравненія:

$$\mathrm{tang}\,\psi = \mathrm{tang}^3\varphi;$$

тогда

$$\operatorname{tang}\psi - \cot\psi = -2\cot 2\psi = -\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3},$$

откуда

$$\cot 2\psi = -\frac{q}{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3};$$

а если уголъ $\psi$ извѣстенъ, $\varphi$ вычислится по формулѣ:

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\psi},$$

и корни уравненія (2) будутъ:

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tang}\varphi - \cot\varphi),$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tang}\varphi - \cot\varphi) \pm \frac{\sqrt{p}}{2}(\operatorname{tang}\varphi + \cot\varphi)\sqrt{-1},$$

или

$$-2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi \pm \frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}\sqrt{-1}.$$

Отсюда видно, что въ случаѣ $4p^3 + 27q^2 > 0$ заданное уравненіе (2) имѣетъ всегда два мнимыхъ корня.

**§ 63. Примѣръ I.**—Требуется рѣшить уравненіе:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Здѣсь $p = -7$, $q = 7$; данное уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня $x_1$ и $x_2$ и одинъ отрицательный $x_3$. Пишемъ:

$$x_1 = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\left(240^0 + \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\left(120^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

и

$$\cos\varphi = -\sqrt{\frac{27}{28}}, \quad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

**Ходъ вычисленій.**

*Вычисленіе* $\varphi$.

$\log(-\operatorname{tang}\varphi) \ldots\ldots \bar{1},2843181$

$180^0-\varphi \ldots\ldots 10^0 53' 36'',2$

$\frac{\varphi}{3} = 56^0 22' 7'',9$

$280^0+\frac{\varphi}{3} = 360^0 - (63^0 37' 52'',1)$

$120^0+\frac{\varphi}{3} = 180^0 - (3^0 37' 52'',3)$

*Вычисленіе* $x_1$.

$\log\sqrt{\frac{28}{3}} \ldots\ldots 0,4850184$

$\log\cos\frac{\varphi}{3} \ldots\ldots \bar{1},7433876$

$\log x_1 \ldots\ldots\ldots 0,2284060$

$x_1 = 1,69202$

*Вычисленіе* $x_2$.

$\log\sqrt{\frac{28}{3}} \ldots\ldots 0,4850184$

$\log\cos\left(240^0+\frac{\varphi}{3}\right) \ldots \bar{1},6475280$

$\log x_2 \ldots\ldots\ldots 0,1325464$

$x_2 = 1,35689$

*Вычисленіе* $x_3$.

$\log\sqrt{\frac{28}{3}} \ldots\ldots 0,4850184$

$\log\left[-\cos\left(120^0+\frac{\varphi}{3}\right)\right] \ldots \bar{1},9991270$

$\log(-x_3) \ldots\ldots 0,4841454$

$x_3 = -3,04892$

**§ 64. Примѣръ II.**—Требуется рѣшить уравненіе:

$$x^3 - 6x + 6 = 0.$$

Здѣсь $p = -6$, $q = 6$; данное уравненіе имѣетъ одинъ вещественный отрицательный корень $x_1$ и два мнимыхъ корня $-\frac{x_2}{2} \pm u\sqrt{-1}$. Пишемъ:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{8}}{\sin 2\varphi},\quad u = \sqrt{6}\cot 2\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\psi},\quad \sin 2\psi = \frac{\sqrt{8}}{3},\quad \operatorname{tang} 2\psi = \sqrt{8}.$$

### Ходъ вычисленій.

*Вычисленіе $\psi$.*

$\log \operatorname{tang} 2\psi$ . . . . . 0,4515450
$2\psi = 70^0 31' 43'',6$
$\psi = 35^0 15' 51'',8$

*Вычисленіе $\varphi$.*

$\log \operatorname{tang} \varphi$ . . . . . $\bar{1}$,9498283
$\varphi = 41^0 41' 52'',0$
$2\varphi = 83^0 23' 44'',0$

*Вычисленіе $x_1$.*

$\frac{1}{2}\log 8$ . . . . . 0,4515450
$-\log\sin 2\varphi$ . . . . . 0,0028916
$\log(-x_1)$ . . . . . 0,4544366
$x_1 = -2,84732$

*Вычисленіе $u$.*

$\frac{1}{2}\log 6$ . . . . . 0,3890756
$\log(-\cot 2\varphi)$ . . . . $\bar{1}$,0636431
$\log u$ . . . . . $\bar{1}$,4527187
$u = 0,283608.$

Корни суть слѣдующіе:

$$-2,84732 \quad \text{и} \quad 1,42366 \pm 0,283608\sqrt{-1}.$$

### УПРАЖНЕНІЯ.

I. Дуга $2x$ раздѣлена на $n$ равныхъ частей; требуется: 1) опредѣлить разстояніе центра среднихъ разстояній точекъ дѣленія до какого-нибудь діаметра, 2) доказать, что въ предѣлѣ, при $n = \infty$, разстояніе центра круга до центра среднихъ разстояній равно $\frac{\sin x}{x}$.

II. Доказать, что разность $x - \sin x$ уменьшается вмѣстѣ съ уменьшеніемъ $x$.

III. Доказать, что если $x$ заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ есть предѣлъ, къ которому стремится произведеніе $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$, когда цѣлое число $n$ увеличивается безпредѣльно. Вывести изъ этого свойства неравенства: $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ и $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

IV. Доказать, что если $x$ содержится между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tang} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{и} \quad x < \frac{1}{3}\operatorname{tang} x + \frac{2}{3}\sin x.$$

V. Доказать, что отношенія $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{x - \sin x}{x^3}$ убываютъ, когда дуга $x$ воз-

растаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$. Доказавъ неравенство: $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(x+h)}{x+h}$, гдѣ $x$ и $h$ положительны и $x+h$ меньше $\frac{\pi}{2}$, можно изъ него вывести неравенство: $\frac{x-\sin x}{x^3} > \frac{x+h-\sin(x+h)}{(x+h)^3}$, пользуясь формулою, изъ которой было выведено неравенство: $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$ (**§ 46**).

VI. Доказать неравенство:

$$\frac{x-\sin x}{x^3} > \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^3, \text{ или } x - \sin x > \frac{x^3}{6{,}79\ldots}$$

для всѣхъ значеній $x$ между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

# ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

## Прямолинейная тригонометрія.

### *Предметъ Прямолинейной тригонометріи.*

**§ 65.** Въ треугольникѣ разсматриваются шесть элементовъ: три угла и три стороны. *Рѣшить* треугольникъ значитъ найти численныя значенія его элементовъ при достаточномъ числѣ данныхъ.

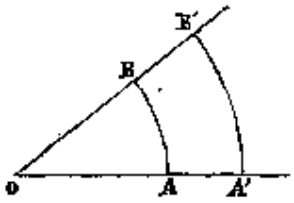
*Прямолинейная тригонометрія* занимается рѣшеніемъ прямолинейныхъ треугольниковъ.

Численныя значенія длинъ суть отношенія этихъ длинъ къ одной и той же единицѣ; поэтому, намъ остается сказать еще только объ измѣреніи угловъ.

### *Измѣреніе угловъ.*

**§ 66.** Описываемъ изъ вершины угла $AOB$ (*черт.* 8), какъ центра, произвольнымъ радіусомъ окружность и обозначаемъ черезъ $R$ и $S$ числа единицъ, содержащихся въ радіусѣ $OA$ и въ дугѣ $AB$, заключенной между сторонами угла. Отношеніе $\frac{S}{R}$ не зависитъ отъ

величины радіуса $OA$; въ самомъ дѣлѣ, если описать изъ точки $O$, какъ центра, другую окружность $A'B'$ и обозначить черезъ $R'$ и $S'$




*Черт.* 8.

числа, которыми измѣряются радіусъ $OA'$ и дуга $A'B'$, заключенная между сторонами угла, то по извѣстной теоремѣ

$$\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'}.$$

Отсюда вытекаетъ, что если положить

$$\omega = \frac{S}{R},$$

то отношеніе $\omega$ будетъ зависѣть только отъ величины угла $AOB$; кромѣ того, такъ какъ уголъ $AOB$ измѣняется пропорціонально числу $\omega$, то $\omega$ можно принять за *величину* угла. При $S = R$ величина $\omega$ приводится къ 1; слѣдовательно, $\omega$ представляетъ отношеніе угла $AOB$ къ нѣкоторому другому углу, который можно принять за единицу; этотъ послѣдній уголъ долженъ быть такой, чтобы часть окружности, заключенная между его сторонами, равнялась бы радіусу этой же самой окружности, описанной изъ его вершины, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ.

Формула $S = R\omega$ весьма часто употребляется въ геометрическихъ приложеніяхъ; она даетъ возможность сравнивать дуги различныхъ окружностей.

Принимая радіусъ $OA$ за линейную единицу, находимъ:

$$R = 1 \text{ и } \omega = S;$$

такимъ образомъ, *уголъ измѣряется тѣмъ же числомъ, что и заключенная между его сторонами дуга окружности, описанной изъ его вершины, какъ центра, радіусомъ, принятымъ за единицу.* Напр., одно и то же число $\frac{\pi}{2}$ выразитъ безразлично какъ прямой уголъ, такъ и

квадрантъ. Вотъ почему слова *уголъ* и *дуга* часто употребляются, какъ синонимы.

И такъ какъ мы согласились, въ приложеніяхъ теоріи круговыхъ функцій, выражать дуги посредствомъ чиселъ градусовъ, минутъ, секундъ, и т. д., заключающихся въ нихъ, то эти же самыя числа градусовъ, минутъ, и т. д., будутъ выражать и соотвѣтственные углы.

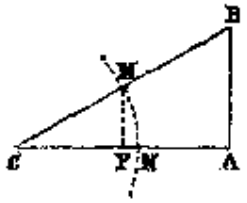
Мы будемъ называть *синусомъ*, *косинусомъ*, *тангенсомъ*, *котангенсомъ*, *секансомъ* и *косекансомъ* *нѣкотораго угла* синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ, секансъ и косекансъ заключенной между его сторонами дуги окружности, описанной изъ его вершины, какъ центра, радіусомъ, принятымъ за единицу.

Черезъ $A$, $B$ и $C$ мы будемъ всегда обозначать три угла треугольника, а черезъ $a$, $b$ и $c$ соотвѣтственно противолежащія стороны. Острые или тупые углы называются *косыми*; треугольники, въ которыхъ нѣтъ прямого угла, называются *косоугольными*.

*Соотношенія между углами и сторонами прямоугольнаго треугольника.*

**§ 67. Теорема.**—*Въ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ катетовъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго угла или на косинусъ прилежащаго.*

Пусть $ABC$ (*черт.* 9) есть прямоугольный треугольникъ и $A$—вершина прямого угла. Изъ точки $C$, какъ центра, радіусомъ равнымъ единицѣ, описываемъ дугу круга $MN$ и опускаемъ перпендикуляръ $MP$ на $AC$. Изъ подобныхъ треугольниковъ $ABC$ и $PMC$ пишемъ:




*Черт.* 9.

$$\frac{c}{a} = \frac{MP}{CM}, \quad \frac{b}{a} = \frac{CP}{CM}.$$

Отсюда, замѣчая, что

$$CM = 1, \; MP = \sin C, \; CP = \cos C,$$

находимъ:

$$c = a \sin C, \quad b = a \cos C.$$

**Слѣдствіе.**—*Въ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ катетовъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ противолежащаго угла или на котангенсъ прилежащаго.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $A$ есть прямой уголъ. По предыдущей теоремѣ

$$c = a \sin C, \quad b = a \cos C;$$

раздѣливъ же по-членно эти равенства, получимъ:

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tang} C \text{ и } c = b \operatorname{tang} C,$$

или

$$c = b \cot B.$$

**Замѣчаніе.**—Между углами и сторонами прямоугольнаго треугольника существуютъ только три различныхъ соотношенія, именно:

$$B + C = 90^0,$$
$$c = a \sin C, \quad b = a \cos C.$$

Дѣйствительно, если бы существовало еще какое-нибудь одно соотношеніе, то, замѣняя въ немъ $c$, $b$ и $B$ ихъ значеніями: $a \sin C$, $a \cos C$ и $90^0 - C$, мы получили бы не тождественную зависимость между $a$ и $C$, что невозможно.

Возвышая въ квадратъ и складывая два послѣднихъ равенства, получаемъ извѣстное соотношеніе:

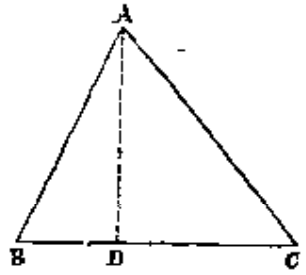
$$c^2 + b^2 = a^2.$$

*Соотношенія между углами и сторонами косоугольнаго треугольника.*

**§ 68. Теорема I.**—*Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ стороны пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ.*

Пусть $ARC$ (*черт.* 10) есть треугольникъ, въ которомъ углы $B$ и $C$ — острые. Опускаемъ изъ вершины $A$ перпендикуляръ $A1$

на основаніе $BC$; точка $D$ упадетъ между точками $B$ и $C$, и пря-




*Черт.* 10.

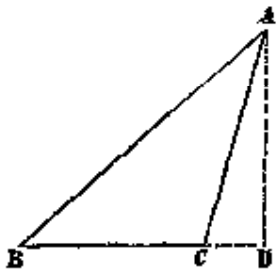
моугольные треугольники $ABD$ и $ACD$ дадутъ (§ 67):

$$AD = c \sin B, \quad AD = b \sin C,$$

откуда

$$c \sin B = b \sin C, \text{ или } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Если одинъ изъ угловъ $B$ и $C$, напр. $C$, тупой (*черт.* 11), то




*Черт.* 11.

основаніе перпендикуляра $AD$ упадетъ на продолженіи $BC$, и такъ какъ оба пополнительныхъ угла имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ, то прямоугольные треугольники $ABC$ и $ACD$ также дадутъ:

$$AD = c \sin B = b \sin C,$$

а это значитъ, что предыдущая формула есть общая.

**§ 69.** Изъ предыдущаго вытекаетъ, что между углами и сторонами треугольника существуютъ слѣдующихъ три различныхъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} &A + B + C = 180^0, \\ &\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

другихъ же соотношеній, отличныхъ отъ этихъ, нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (1) выводимъ:

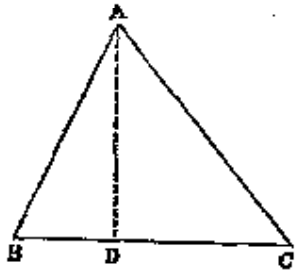
$$A = 180^0 - B - C,\ b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)},\ c = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)},$$

и если бы между углами и сторонами существовало еще какое-нибудь одно соотношеніе, отличное отъ соотношеній (1), то, вставляя въ него вмѣсто $A$, $b$, $c$ только-что выведенныя ихъ значенія, мы получили бы между стороною $a$ и двумя прилежащими углами $B$ и $C$ не тождественную зависимость, что невозможно.

Изъ уравненій (1) можно вывести и другія важныя соотношенія, каждое изъ которыхъ выразитъ особую теорему; мы начнемъ съ непосредственнаго вывода этихъ теоремъ, а затѣмъ покажемъ, какъ всѣ эти соотношенія, которыя мы получимъ, могутъ быть выведены однѣ изъ другихъ.

**§ 70. Теорема II.** — *Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ квадратъ каждой стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія тѣхъ же сторонъ на косинусъ угла между ними.*

Пусть $ABC$ (*черт.* 12) есть треугольникъ, въ которомъ уголъ




*Черт.* 12.

$C$ — острый. Опускаемъ изъ вершины $A$ перпендикуляръ $AD$ на $BC$; тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CD;$$

изъ прямоугольнаго же треугольника $ACD$ (**§ 67**)

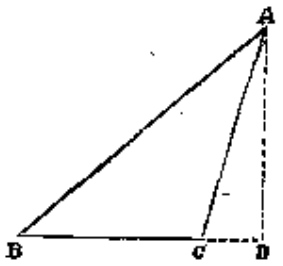
$$CD = b \cos C;$$

слѣдовательно,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Если уголъ $C$ треугольника — тупой (*черт.* 13), то

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \times CD;$$




*Черт.* 13.

а такъ какъ изъ прямоугольнаго треугольника $ACD$

$$CD = b\cos ACD = b\cos(180^0 - C) = -b\cos C,$$

то, слѣдовательно,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

какъ и въ первомъ случаѣ. Выведенная формула справедлива также и тогда, когда уголъ $C$ — прямой; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\cos C = 0$ и наша формула приводится къ $c^2 = a^2 + b^2$.

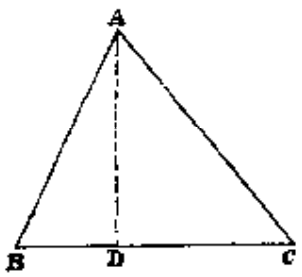
Только-что выведенная теорема даетъ три слѣдующихъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

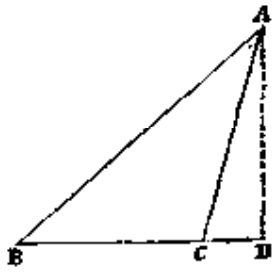
въ каждое изъ нихъ входятъ три стороны и уголъ.

**§ 71. Теорема III.** — *Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ каждая изъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на косинусы угловъ, образуемыхъ ими съ первою стороною.*

Пусть данъ треугольникъ $ABC$ (*черт.* 14 и 15). Опускаемъ изъ




*Черт.* 14.




*Черт.* 15.

вершины $A$ перпендикуляръ $AD$ на $BC$; если оба угла $B$ и $C$ — острые (*черт.* 14), то

$$a = BD + DC,$$

а если одинъ изъ угловъ $B$ и $C$, напр. $C$, тупой (*черт.* 15), то

$$a = BD - DC.$$

Въ первомъ случаѣ $DC = b\cos C$, а во второмъ $DC = b\cos(180^0 - C) = -b\cos C$, и въ обоихъ случаяхъ $BD = c\cos B$; слѣдовательно,

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

Эта теорема даетъ три слѣдующихъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B, \\ b &= c\cos A + a\cos C, \\ c &= a\cos B + b\cos A. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

**§ 72.** Чтобы вывести уравненія (3) изъ уравненій (2), складываемъ два первыхъ изъ уравненій (2) и послѣ упрощеній получаемъ:

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Это есть одно изъ уравненій (3); два другихъ получимъ такимъ же образомъ.

Обратно, чтобы вывести уравненія (2) изъ уравненій (3), умножаемъ уравненія (3) соотвѣтственно на $a$, $b$, $-c$ и результаты складываемъ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Это есть одно изъ уравненій (2); такъ же получимъ два другихъ.

Отсюда вытекаетъ, что системы (2) и (3) однозначны; покажемъ, какъ можно вывести одну изъ этихъ системъ, напр. (3), изъ основныхъ уравненій (1).

Первое изъ уравненій (1) даетъ:

$$C = 180^0 - (A + B),$$

откуда

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A;$$

замѣняя $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ пропорціональными имъ величинами: $a$, $b$, $c$, находимъ:

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Это есть одно изъ уравненій (3); такъ же получимъ два другихъ.

Наконецъ, уравненія (1) могутъ быть выведены изъ уравненій

(2) или (3), если ввести ограниченіе, что сумма $A+B+C$ не превосходитъ 180 градусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, первое изъ уравненій (2) даетъ:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\sin^2 A = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4b^2c^2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Очевидно, что точно такое же значеніе мы нашли бы для $\frac{\sin^2 B}{b^2}$ и для $\frac{\sin^2 C}{c^2}$; дѣйствительно, полученное выраженіе для $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ не измѣнится, если стороны $a$, $b$, $c$ замѣнить однѣ другими въ послѣдовательномъ порядкѣ; поэтому, если $A$, $B$, $C$ меньше 180 градусовъ и, слѣдовательно, ихъ синусы положительны, то мы можемъ написать:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Во-вторыхъ, можно исключить $a$, $b$, $c$ изъ уравненій (2) или (3), такъ какъ эти уравненія однородны относительно исключаемыхъ буквъ; при исключеніи двухъ изъ трехъ сторонъ, третья также исчезнетъ и получится:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C-1=0,$$

или

$$(\cos A+\cos B\cos C)^2=1-\cos^2 B-\cos^2 C+\cos^2 B\cos^2 C=\sin^2 B\sin^2 C;$$

по извлеченіи же квадратныхъ корней будетъ:

$$\cos A = -\cos B\cos C\pm\sin B\sin C = -\cos(B\pm C),$$

откуда

$$A\pm B\pm C = 180^0\times(2k+1),$$

гдѣ $k$ обозначаетъ цѣлое число. Если, при этомъ, сумма $A+B+C$ не превосходитъ 180 градусовъ, то непремѣнно

$$A+B+C=180^0.$$

*Другія формулы, относящіяся къ косоугольнымъ треугольникамъ.*

**§ 73.** Преобразовывая предыдущія формулы, мы можемъ получить новыя, весьма полезныя въ приложеніяхъ. Выведемъ нѣкоторыя изъ нихъ.

Изъ основныхъ соотношеній:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

выводимъ:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C},$$

или, такъ какъ $\frac{1}{2}(A+B) = 90^0 - \frac{1}{2}C$,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}, \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}; \tag{1}$$

дѣля эти уравненія одно на другое, находимъ:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C. \tag{2}$$

Каждая изъ формулъ (1) содержитъ всѣ шесть элементовъ, формула же (2) только двѣ стороны и углы.

**§ 74.** Соотношеніе:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

даетъ:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

но такъ какъ

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}, \qquad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

то, подставляя сюда вмѣсто $\cos A$ его значеніе, получимъ:

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}},$$
$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Посредствомъ простыхъ перестановокъ буквъ мы найдемъ подобныя же формулы для косинусовъ и синусовъ угловъ $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$. Полагая, для сокращенія,

$$a+b+c=2p$$

и, слѣдовательно,

$$-a+b+c=2(p-a),$$
$$a-b+c=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c),$$

мы можемъ написать слѣдующія двѣ системы формулъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\\ \cos\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\\ \cos\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\ \sin\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\ \sin\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

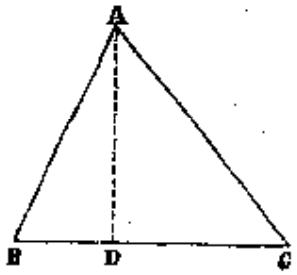
наконецъ, раздѣливъ каждую формулу группы (4) на соотвѣтственную формулу группы (3), получимъ новую систему формулъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

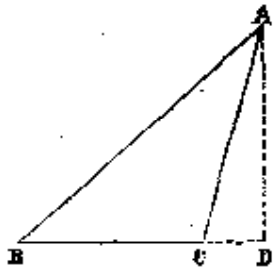
Во всѣхъ этихъ формулахъ нужно брать при радикалѣ знакъ $+$; дѣйствительно, половины угловъ треугольника меньше 90 градусовъ и потому всѣ ихъ тригонометрическія линіи положительны.

*Выраженія для площади треугольника и для радіусовъ вписаннаго и описаннаго круговъ.*

**§ 75. Площадь треугольника.** — Пусть данъ треугольникъ $ABC$




*Черт.* 16.




*Черт.* 17.

(*черт.* 16 и 17). Опускаемъ изъ вершины $A$ высоту $AD$; обозначая черезъ $s$ площадь треугольника, пишемъ:

$$s = \frac{1}{2}a \times AD.$$

Далѣе, такъ какъ изъ прямоугольнаго треугольника $ADC$

$$AD = b \sin C,$$

то

$$s = \frac{1}{2}ab \sin C. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, *площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ сторонъ на синусъ угла между ними.*

Примѣняя эту теорему къ четыремъ треугольникамъ, на которые

разбивается четыреугольникъ своими діагоналями, получаемъ такой результатъ:

*Площадь всякаго четыреугольника равна половинѣ произведенія діагоналей на синусъ угла между ними.*

Замѣняя $b$ въ формулѣ (1) его значеніемъ изъ уравненія:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin B}{\sin(B+C)},$$

находимъ:

$$s = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin(B+C)}. \qquad (2)$$

Наконецъ, выведенныя въ предыдущемъ параграфѣ уравненія:

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\quad \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

даютъ:

$$\sin C = 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C = 2\,\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab};$$

замѣняя же въ формулѣ (1) $\sin C$ этимъ значеніемъ, пишемъ:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (3)$$

$p$ здѣсь обозначаетъ полупериметръ $\frac{a+b+c}{2}$.

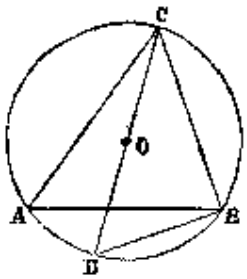
Изъ этой формулы и изъ формулъ § 74-го выводимъ еще слѣдующія, заслуживающія вниманія, формулы:

$$\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{s^2}{pabc},$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C = \frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{ps}{abc},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \frac{s}{p^2}.$$

**§ 76. Радіусъ описаннаго круга.** — Пусть будетъ описанъ кругъ около треугольника $ABC$ (*черт.* 18). Ведемъ черезъ вершину $C$ діаметръ $CD = 2R$ и соединяемъ $B$ съ $D$; уголъ $D$ прямоугольнаго




*Черт.* 18.

треугольника $BCD$ равенъ или $A$, или его пополненію до 180°; слѣдовательно,

$$a = 2R\sin A, \text{ или } R = \frac{a}{2\sin A}.$$

Умножая числитель и знаменатель послѣдней дроби на $bc$, получаемъ:

$$R = \frac{abc}{2bc\sin A} = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

**§ 77. Радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ.**— Пусть $r$ есть радіусъ вписаннаго круга. Соединяя центръ этого круга съ тремя вершинами, мы разложимъ треугольникъ на три другихъ съ общею высотою $r$ и съ основаніями, равными соотвѣтственно тремъ сторонамъ: $a$, $b$, $c$; слѣдовательно, $s = r\frac{a+b+c}{2}$, или

$$s = pr, \text{ и } r = \frac{s}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Если обозначить черезъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ радіусы круговъ, внѣвписанныхъ въ треугольникъ, т.-е. такихъ круговъ, которые касаются соотвѣтственно сторонъ: $a$, $b$, $c$ и продолженій двухъ другихъ, то, какъ легко видѣть,

$$s = (p-a)\alpha = (p-b)\beta = (p-c)\gamma,$$

откуда

$$\alpha = \frac{s}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

$$\beta = \frac{s}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$\gamma = \frac{s}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Можно также написать (§ 74), что

$$\alpha = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} A, \quad \beta = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} B, \quad \gamma = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} C.$$

Изъ этихъ формулъ могутъ быть выведены еще нѣкоторыя другія, изъ которыхъ должно замѣтить слѣдующія:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma},$$
$$s = \sqrt{r\alpha\beta\gamma},$$
$$4R = \alpha + \beta + \gamma - r.$$

*Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.*

§ 78. **Первый случай.**—*Даны гипотенуза $a$ и острый уголъ $B$, вычислить уголъ $C$ и катеты $b$ и $c$.*

Неизвѣстные элементы опредѣлятся по формуламъ:

$$C = 90^0 - B, \quad b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Первая изъ нихъ даетъ $C$ непосредственно, двѣ же остальныя требуютъ логариѳмическаго вычисленія:

$$\log b = \log a + \log \sin B, \quad \log c = \log a + \log \cos B.$$

§ 79. **Второй случай.**—*Даны гипотенуза $a$ и катетъ $b$, вычислить катетъ $c$ и углы $B$ и $C$.*

Для опредѣленія неизвѣстныхъ элементовъ пишемъ:

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}, \quad c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Непосредственное опредѣленіе угла $C$, какъ мы видимъ, получается черезъ косинусъ; поэтому, оно не дастъ достаточной точности, если гипотенуза треугольника мало отличается отъ заданнаго катета, что часто и случается. Тогда можно начать съ вычисленія $c$ и затѣмъ получить $C$ по формулѣ:

$$\operatorname{tang} C = \frac{c}{b};$$

логариемируя, находимъ:

$$\log c = \frac{1}{2}[\log(a+b)+\log(a-b)],$$
$$\log\operatorname{tang} C = \log c - \log b.$$

Также можно вычислить $C$ прямо, замѣняя $\cos C$ его значеніемъ $\frac{b}{a}$ въ формулахъ:

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

которыя послѣ такой замѣны перейдутъ въ слѣдующія:

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{a-b}{2a}}, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}};$$

каждая изъ этихъ формулъ дастъ уголъ $C$ съ извѣстною точностью, но вторая—предпочтительнѣе, такъ какъ не требуетъ другихъ логариемовъ кромѣ тѣхъ, которые нужны для вычисленія $c$.

**§ 80. Третій случай.**—*Даны катетъ $b$ и одинъ изъ острыхъ угловъ, вычислить второй уголъ и двѣ другія стороны.*

Неизвѣстные элементы опредѣлятся по формуламъ:

$$B+C=90^0, \quad a=\frac{b}{\sin B}, \quad c=b\cot B;$$

логариемируя двѣ послѣднія формулы, получаемъ:

$$\log a = \log b - \log\sin B,$$
$$\log c = \log b + \log\cot B.$$

**§ 81. Четвертый случай.**—*Даны катеты $b$ и $c$, вычислить гипотенузу $a$ и острые углы $B$ и $C$.*

Для опредѣленія неизвѣстныхъ элементовъ имѣемъ:

$$\cot C = \operatorname{tang} B = \frac{b}{c}, \quad a^2 = b^2+c^2.$$

Послѣдняя формула неудобна для логариемическихъ вычисленій: ее пришлось бы преобразовать, вводя вспомогательный уголъ; такой пріемъ приводитъ сначала къ вычисленію $B$ по формулѣ:

$$\log\operatorname{tang} B = \log b - \log c,$$

послѣ чего $a$ опредѣлится по формулѣ:

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad \text{или} \quad \log a = \log b - \log \sin B.$$

**§ 82. Примѣръ.**—Даны:

$$a = 5892^{м},51, \quad b = 5439^{м},24.$$

*вычислить* $c$, $B$ *и* $C$.

**Ходъ вычисленій.**

$$a + b = 11331,75, \quad a - b = 453,27$$

*Вычисленіе стороны c.*

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

| | |
|---|---|
| $\log(a+b)$ . . . . . | 4,0542970 |
| $\log(a-b)$ . . . . . | 2,6563570 |
| . . . . . | 6,7106540 |
| $\log c$ . . . . . | 3,3553270 |

$c = 2266^{м},35$

*Вычисленіе угла C.*

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

| | |
|---|---|
| $-\log(a+b)$ . . . . . | $\bar{5}$,9457030 |
| $\log(a-b)$ . . . . . | 2,6563570 |
| . . . . . | $\bar{2}$,6020600 |
| $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} C$. . . . . | 1,3010300 |

$\frac{1}{2} C = 11^{\circ}18'35'',76$

$C = 22^{\circ}37'11'',52.$

Далѣе,

$$B = 90^{0} - C = 67^{\circ}22'48'',48.$$

*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны одна сторона и два угла.*

**§ 83.** Неизвѣстный уголъ получится непосредственно, по формулѣ:

$$A + B + C = 180^{0}.$$

Если дана сторона $a$, то стороны $b$ *и* $c$ вычислятся по формуламъ:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

**§ 84. Примѣръ.**—Даны:

$$A = 81^{\circ}47'12'',5, \quad B = 38^{\circ}12'47'',5, \quad C = 60^{0}, \quad a = 7012^{м},24,$$

*вычислить стороны* $b$ *и* $c$ *и площадь* $s$ *треугольника.*

**Ходъ вычисленій.**

*Вычисленіе стороны b.*

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ | 3,8458568 |
| $-\log \sin A$ | 0,0044774 |
| $\log \sin B$ | $\bar{1}$,7914024 |
| $\log b$ | 3,6417366 |

$b = 4382^{м},65$

*Вычисленіе стороны c.*

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ | 3,8458568 |
| $-\log \sin A$ | 0,0044774 |
| $\log \sin C$ | $\bar{1}$,9375306 |
| $\log c$ | 3,7878648 |

$c = 6135^{м},71$

*Вычисленіе площади s.*

$$s = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A},$$

| | |
|---|---|
| $2\log a$ | 7,6917136 |
| $\log \sin B$ | $\bar{1}$,7914024 |
| $\log \sin C$ | $\bar{1}$,9375306 |
| $-\log \sin A$ | 0,0044774 |
| $-\log 2$ | $\bar{1}$,6989700 |
| $\log s$ | 7,1240940 |

$s = 13307423^{кв.\ м.}$.

*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ.*

**§ 85.** Если $a$, $b$ и $A$ — данные элементы, то опредѣляютъ послѣдовательно неизвѣстные элементы по формуламъ:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \quad A + B + C = 180^0, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Если уголъ $B$ мало отличается отъ 90 градусовъ, то онъ не можетъ быть опредѣленъ съ достаточною точностью по своему синусу; въ такомъ случаѣ вычисляютъ сначала произведеніе $b \sin A$ и затѣмъ получаютъ уголъ $B$ по формулѣ:

$$\operatorname{tang} B = \pm \frac{b \sin A}{\sqrt{(a + b \sin A)(a - b \sin A)}};$$

также можно воспользоваться формулою:

$$\operatorname{tang}\left(45^0+\frac{1}{2}B\right)=\pm\sqrt{\frac{a+b\sin A}{a-b\sin A}},$$

которая вытекаетъ изъ равенства:

$$\operatorname{tang}\left(45^0+\frac{1}{2}B\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}.$$

при замѣнѣ $\sin B$ его значеніемъ.

Однако, послѣднія формулы не могутъ дать $B$ съ достаточною точностью, если этотъ уголъ весьма мало отличается отъ 90 градусовъ и если данныя, какъ часто и бываетъ, не вполнѣ точны. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ случаѣ небольшая ошибка въ данныхъ элементахъ можетъ причинить значительную ошибку въ углѣ $B$. [1])

Замѣчаніе I. — Если $a>b\sin A$, то только въ этомъ случаѣ по Таблицамъ можно найти для $B$ значеніе $M<90^0$, но можно также взять $B=180^0-M$; для $C$ будетъ два соотвѣтствующихъ значенія:

$$C=180^0-A-M,\quad C=M-A$$

и, слѣдовательно, также два соотвѣтствующихъ значенія для $c$.

Чтобы уголъ $M$ удовлетворялъ вопросу, необходимо и достаточно, чтобы $A+M$ было $<180$ градусовъ; равнымъ образомъ, чтобы $180^0-M$ соотвѣтствовало вопросу, необходимо и достаточно, чтобы $M$ было $>A$. Изслѣдуемъ, когда эти условія могутъ быть выполнены.

1. Если $A=$ или $>90$ градусовъ, то значеніе $180^0-M$ для $B$ не годится, и условіе, чтобы $M$ было рѣшеніемъ задачи, выразится неравенствомъ:

$$M<180^0-A,$$

или, такъ какъ обѣ части этого неравенства меньше 90 градусовъ, неравенствомъ:

$$\sin M<\sin(180^0-A)=\sin A.$$

т.-е.

$$\frac{b\sin A}{a}<\sin A,\ \text{или}\ b<a.$$

---

[1]) См. *Дифференціальныя тригонометрическія формулы* въ Сферической тригонометріи Серре. Пер. М. В. Пирожкова. Спб. 1902 г.

Отсюда видно, что задача можетъ имѣть только одно рѣшеніе, и что условіе для существованія этого рѣшенія заключается въ томъ, чтобы сторона, противолежащая данному углу, была больше другой данной стороны.

2. Если $A < 90^0$, то значеніе $M$ для $B$ всегда удовлетворитъ, но чтобы можно было взять также $B = 180^0 - M$, необходимо, чтобы

$$M > A,$$

или, такъ какъ обѣ части этого неравенства меньше 90 градусовъ, чтобы

$$\sin M > \sin A.$$

т.-е. чтобы

$$\frac{b \sin A}{a} > \sin A, \text{ или } b < a.$$

Какъ видно, въ разсмотрѣнномъ случаѣ условіе возможности есть $a > b \sin A$; если это условіе выполнено, задача допускаетъ одно или два рѣшенія, смотря по тому, будетъ ли сторона, противолежащая данному углу, больше или меньше другой данной стороны.

Наши заключенія вполнѣ совпадаютъ съ заключеніями, выводимыми геометрически; останавливаться на этомъ мы считаемъ излишнимъ.

**Замѣчаніе II.**—Въ предыдущемъ рѣшеніи сторона $c$ вычисляется послѣ угловъ $B$ и $C$; если же эти послѣдніе не нужны, то сторону $c$ можно вычислить и непосредственно, пользуясь формулою:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

откуда

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A};$$

чтобы привести эту формулу къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій, нужно ввести вспомогательный уголъ (§ 58); вычисленія, которыя придется при этомъ произвести, будутъ также длинны, какъ и тѣ, къ которымъ приводитъ первый методъ введенія вспомогательнаго угла. Есть другой, болѣе естественный, способъ привести выраженіе для $c$ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій, именно нужно положить (§ 58)

$$\frac{b \sin A}{a} = \sin \varphi, \text{ откуда } b = \frac{a \sin \varphi}{\sin A};$$

тогда значеніе $c$ будетъ:

$$c = \frac{a \sin\varphi \cos A}{\sin A} \pm a \cos\varphi = \frac{a \sin(\varphi \pm A)}{\sin A},$$

откуда видно, что вспомогательный уголъ $\varphi$ есть какъ-разъ уголъ $B$ треугольника. Слѣдовательно, нѣтъ никакой надобности измѣнять данное нами рѣшеніе.

**§ 86. Примѣръ.** — *Даны:*

$$A = 27^\circ 47' 44'',77, \quad a = 2199^{м},12, \quad b = 2513^{м},28,$$

*вычислить* $B$, $C$ *и* $c$.

**Ходъ вычисленій.**

*Вычисленіе угла B.*

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

| | |
|---|---|
| $\log b$ . . . . . | 3,4002409 |
| $-\log a$ . . . . . | 4,6577511 |
| $\log \sin A$ . . . . . | $\bar{1}$,6686853 |
| $\log \sin B$ . . . . . | 1,7266773 |

Будетъ два рѣшенія:

$$B = 32^\circ 12' 15'',23 \quad \text{и} \quad B = 147^\circ 47' 44'',77.$$

**ПЕРВОЕ РѢШЕНІЕ.**

$B = 32^\circ 12' 15'',23$

*Вычисленіе угла C.*

$C = 180^\circ - A - B$

| | |
|---|---|
| $A =$ | $27^\circ 47' 44'',77$ |
| $B =$ | $32^\circ 12' 15'',23$ |
| $C =$ | $120^\circ 0' 0''$ |

*Вычисленіе стороны c.*

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | 3,3422489 |
| $-\log \sin A$ . . . . . | 0,3313147 |
| $\log \sin C$ . . . . . | $\bar{1}$,9375306 |
| $\log c$ . . . . . | 3,6110942 |

$c = 4084^{м},08$

**ВТОРОЕ РѢШЕНІЕ.**

$B = 147^\circ 47' 44'',77$

*Вычисленіе угла C.*

$C = 180^\circ - A - B$

| | |
|---|---|
| $A =$ | $27^\circ 47' 44'',77$ |
| $B =$ | $147^\circ 47' 44'',77$ |
| $C =$ | $4^\circ 24' 30'',46$ |

*Вычисленіе стороны c.*

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | 3,3422489 |
| $-\log \sin A$ . . . . . | 0,3313147 |
| $\log \sin C$ . . . . . | $\bar{2}$,8857358 |
| $\log c$ . . . . . | 2,5592994 |

$c = 362^{м},493.$

*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними.*

**§ 87. Первый методъ.**—Пусть $a$, $b$, $C$ будутъ данные элементы. Чтобы найти углы $A$ и $B$, можно воспользоваться формулою (2) **§ 73**-го, именно:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C.$$

Эта формула даетъ полуразность:

$$\frac{1}{2}(A-B)=M;$$

съ другой же стороны, извѣстно, что

$$\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}C;$$

отсюда, посредствомъ сложенія и вычитанія, получаемъ:

$$A=90^0-\frac{1}{2}C+M,$$

$$B=90^0-\frac{1}{2}C-M.$$

Вычисливъ такимъ образомъ углы $A$ и $B$, мы можемъ вычислить $c$ по формулѣ:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

но лучше воспользоваться одною изъ формулъ (1) **§ 73**-го, именно:

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},\quad c=\frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

придется только взять два новыхъ логариѳма.

Если стороны $a$ и $b$ заданы посредствомъ своихъ логариѳмовъ, то можно сократить вычисленіе дроби $\frac{a-b}{a+b}$, входящей въ составъ выраженія для $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)$. Для этого достаточно ввести вспомогательный уголъ $\varphi$ посредствомъ равенства:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{a}{b};$$

дѣйствительно, тогда

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^0)$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \operatorname{tang}(\varphi - 45^0)\cot\frac{1}{2}C.$$

Далѣе вычисленіе угловъ $A$ и $B$ идетъ, какъ показано выше; для опредѣленія же стороны $c$ надо прибѣгнуть къ формулѣ:

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

**Второй методъ.** — Эту же самую задачу можно рѣшить при помощи формулъ:

$$c\sin A = a\sin C,$$
$$c\cos A = b - a\cos C$$

и получить такимъ образомъ наиболѣе простое рѣшеніе, въ особенности если, какъ это часто случается въ Астрономіи, $a$ извѣстно посредствомъ своего логариѳма, а $b$ дано непосредственно. Два предыдущихъ уравненія для вычисленій съ помощью логариѳмовъ даютъ:

$$\log(\pm\operatorname{tang} A) = \log a + \log\sin C - \log[\pm(b - a\cos C)],$$
$$\log c = \log a + \log\sin C - \log\sin A.$$

Чтобы найти $\log[\pm(b - a\cos C)]$, вычисляютъ сначала логариѳмъ абсолютной величины $a\cos C$ и подыскиваютъ $a\cos C$, а затѣмъ, посредствомъ сложенія или вычитанія, получаютъ $b - a\cos C$. Когда уголъ $A$ найденъ, $B$ опредѣлится изъ соотношенія $A+B+C = 180^0$.

**§ 88. Примѣръ.** — *Дано:*

$$\log a = 0{,}4287591,\quad \log b = 0{,}0008764,\quad C = 78^0 28'7'',62,$$

*вычислить углы $A$ и $B$, сторону $c$ и площадь $s$.*

**Ходъ вычисленій (первый методъ).**

*Вычисленіе* $\varphi$ $\left(\operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}\right)$.

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | 0,4287591 |
| $\log b$ . . . . . | 0,0008764 |
| $\log\operatorname{tang}\varphi$ . . . . . | 0,4278827 |
| $\varphi = 69^0 31'36'',59$ | |
| $\varphi - 45^0 = 24^0 31'36'',59$ | |

*Вычисленіе угловъ A и B.*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\operatorname{tang}(\varphi-45^0)\cot\tfrac{1}{2}C.$$

| | |
|---|---|
| $\log\operatorname{tang}(\varphi-45^0)$ . . . . . | $\bar{1},6592428$ |
| $\log\cot\frac{1}{2}C$ . . . . . | $0,0880012$ |
| $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)$ . . . . . | $\bar{1},7472440$ |
| $\frac{1}{2}(A-B)$ . . . . . | $29^0 11' 44'',75$ |
| $\frac{1}{2}(A+B)$ . . . . . | $50^0 45' 56'',19$ |
| $A$ | $=79^0 57' 40'',94$ |
| $B$ | $=31^0 34' 11'',44$ |

*Вычисленіе стороны c.*

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | $0,4287591$ |
| $\log\sin C$ . . . . . | $\bar{1},9911445$ |
| $-\log\sin A$ . . . . . | $0,0067003$ |
| $\log c$ . . . . . | $0.4266039$ |
| $c$ | $=2,67057$ |

*Вычисленіе площади s.*

$$s=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | $0,4287591$ |
| $\log b$ . . . . . | $0,0008764$ |
| $\log\sin C$ . . . . . | $\bar{1},9911445$ |
| $-\log 2$ . . . . . | $\bar{1},6989700$ |
| $\log s$ . . . . . | $0,1197500$ |
| $s$ | $=1,3175.$ |

**Ходъ вычисленій (второй методъ).**

**Вычисленіе начинаемъ съ** $b$, **заданнаго посредствомъ логариѳма; находимъ** $b=1,002020$.

*Вычисленіе A.*

$$\operatorname{tang}A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}.$$

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | $0,4287591$ |
| $\log\cos C$ . . . . . | $\bar{1},3008167$ |
| $\log a\cos C$ . . . . . | $\bar{1},7295758$ |
| $a\cos C$ . . . . . | $0,5365075$ |
| $b-a\cos C$ . . . . . | $0,4655125$ |

| | |
|---|---|
| $\log a$ . . . . . | $0,4287591$ |
| $\log\sin C$ . . . . . | $\bar{1},9911445$ |
| $-\log(b-a\cos C)$ . . . | $0,3320687$ |
| $\log\operatorname{tang}A$ . . . . . | $0,7519723$ |
| $A$ | $=79^0 57' 40'',95.$ |

**Чтобы вычислить** $c$, **поступаютъ такъ же, какъ и при первомъ методѣ; только здѣсь нуженъ еще одинъ новый логариѳмъ, именно** $\log\sin A$.

*Рѣшеніе косоугольнаго треугольника, въ которомъ извѣстны три стороны.*

**§ 89.** Формулы **§ 70**-го, опредѣляющія углы $A$, $B$, $C$ по сторонамъ, не удобны для логариѳмическихъ вычисленій, но выведенныя изъ нихъ формулы **§ 74**-го могутъ служить для вычисленія угловъ. Изъ нихъ слѣдуетъ предпочитать формулы третьей группы, именно:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

опредѣляющія углы $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ по ихъ тангенсамъ.

**Замѣчаніе.**—Чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы каждая изъ сторонъ была меньше суммы двухъ другихъ; если это условіе не выполнено, одна изъ разностей: $p-a$, $p-b$, $p-c$ будетъ отрицательною, а двѣ другія—положительными: слѣдовательно, значенія $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$, . . . явятся мнимыми.

**§ 90. Примѣръ.**—*Даны:*

$$a=701^{m},224,\quad b=438^{m},265,\quad c=613^{m},571,$$

*вычислить углы* $A$, $B$, $C$ *и площадь* $s$.

**Ходъ вычисленій.**

| | |
|---|---|
| $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ . . . . . 876,530 | $\log p$ . . . . . 2,9427668 |
| $p-a$ . . . . . 175,306 | $\log(p-a)$ . . . . . 2,2437968 |
| $p-b$ . . . . . 438,265 | $\log(p-b)$ . . . . . 2,6417368 |
| $p-c$ . . . . . 262,959 | $\log(p-c)$ . . . . . 2,4198881 |

*Вычисленіе угла A.*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

| | |
|---|---|
| $\log(p-b)$ . . . . . | 2,6417368 |
| $\log(p-c)$ . . . . . | 2,4198881 |
| $-\log(p-a)$. . . . . | $\bar{3}$,7562032 |
| $-\log p$ . . . . . | $\bar{3}$,0572332 |
| . . . . . | $\bar{1}$,8750613 |
| $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$ . . . . . | $\bar{1}$,9375306 |

$\frac{1}{2}A = 40^0 53' 36'',22$

$A = 81^0 47' 12'',44$

*Вычисленіе угла B.*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

| | |
|---|---|
| $\log(p-a)$ . . . . . | 2,2437968 |
| $\log(p-c)$ . . . . . | 2,4198881 |
| $-\log(p-b)$. . . . . | $\bar{3}$,3582632 |
| $-\log p$ . . . . . | $\bar{3}$,0572332 |
| . . . . . | $\bar{1}$,0791813 |
| $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}B$ . . . . . | $\bar{1}$,5395906 |

$\frac{1}{2}B = 19^0 6' 23'',77$

$B = 38^0 12' 47'',54$

*Вычисленіе угла C.*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

| | |
|---|---|
| $\log(p-a)$ . . . . . | 2,2437968 |
| $\log(p-b)$ . . . . . | 2,6417368 |
| $-\log(p-c)$. . . . . | $\bar{3}$,5801119 |
| $-\log p$ . . . . . | $\bar{3}$,0572332 |
| . . . . . | $\bar{1}$,5228787 |
| $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$ . . . . . | $\bar{1}$,7614393 |

$\frac{1}{2}C = 30^0$

$C = 60^0$

*Вычисленіе площади s.*

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

| | |
|---|---|
| $\log p$ . . . . . | 2,9427668 |
| $\log(p-a)$ . . . . . | 2,2437968 |
| $\log(p-b)$ . . . . . | 2,6417368 |
| $\log(p-c)$ . . . . . | 2,4198881 |
| . . . . . | 10,2481885 |
| $\log s$ . . . . . | 5,1240942 |

$s = 133074^{\text{кв. м}},23.$

*Повѣрка:* $A + B + C = 180^0 - 0'',02.$

*Различные случаи, гдѣ данныя не исключительно стороны и углы.*

**§ 91.** Число задачъ, какія можно предложить на рѣшеніе треугольниковъ, безгранично. Мы приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ.

**Задача 1.**—*Рѣшить треугольникъ, зная уголъ C, противолежащую сторону c и сумму или разность двухъ другихъ сторонъ a и b.*

Одна изъ формулъ (1) **§ 73**-го:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

даетъ непосредственно полуразность $\frac{1}{2}(A-B)$; а такъ какъ полусумма $\frac{1}{2}(A+B)$ извѣстна, то отсюда опредѣлятся $A$ и $B$; далѣе мы находимъ $a-b$, если дано $a+b$, или $a+b$, если дано $a-b$, по той изъ двухъ предыдущихъ формулъ, которою еще не пользовались.

**§ 92. Задача II.**—*Рѣшить треугольникъ, зная уголъ $B$, прилежащую сторону $a$ и сумму или разность двухъ другихъ сторонъ.*

Называя черезъ $2p$ периметръ $a+b+c$, пишемъ (**§ 74**):

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\quad \operatorname{tang}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

откуда

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\frac{p-a}{p}\text{ и }\operatorname{tang}\frac{C}{2}\cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{p-c}.$$

Если дана сумма $b+c$, то извѣстны $p$ и $p-a$; если же дана разность $b-c$, то извѣстны $p-b$ и $p-c$. Поэтому, и въ томъ, и въ другомъ случаѣ можно вычислить уголъ $C$ по предыдущимъ формуламъ. Далѣе, рѣшеніе оканчивается такъ же, какъ и въ **§ 83-мъ**, или лучше по какой-нибудь одной изъ формулъ, выводимыхъ изъ предыдущихъ посредствомъ взаимной перестановки буквъ: $A$ и $B$, $a$ и $b$.

**§ 93. Задача III.**—*Рѣшить треугольникъ, зная площадь $s$ и углы.*

По **§ 75-му**

$$s=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A},\quad\text{откуда}\quad a=\sqrt{\frac{2s\sin A}{\sin B\sin C}}.$$

Стороны $b$ и $c$ вычисляются по аналогичнымъ формуламъ.

**§ 94. Задача IV.**—*Рѣшить треугольникъ, зная периметръ и углы.*

Изъ формулъ (3) и (4) **§ 74-го** выводимъ:

$$\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{p}{a}\sin\frac{1}{2}A,$$

откуда

$$a=\frac{p\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C};$$

по этой формулѣ мы и вычислимъ $a$.

**§ 95. Задача V.**—*Рѣшить треугольникъ, зная радіусъ $r$ вписаннаго круга и углы.*

Изъ формулъ, данныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, легко выводятся слѣдующія:

$$p-a=r\cot\frac{1}{2}A,\quad p-b=r\cot\frac{1}{2}B,\quad p-c=r\cot\frac{1}{2}C.$$

по которымъ можно вычислить $p-a$, $p-b$, $p-c$, а слѣдовательно и стороны: $a$, $b$, $c$.

**§ 96. Задача VI.**—*Рѣшить треугольникъ, зная уголъ $C$ и суммы $c+a$, $c+b$, получаемыя отъ сложенія противолежащей стороны $c$ съ каждою изъ двухъ другихъ сторонъ.*

Предположимъ, что $c+a>c+b$. Формулы (1) **§ 73**-го даютъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(c+a)+(c+b)}{c}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C},\\ \frac{(c+a)-(c+b)}{c}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

откуда

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C}=\frac{(c+a)-(c+b)}{(c+a)+(c+b)}\cot\frac{1}{2}C.\qquad(2)$$

Полученная формула (2) содержитъ только одну неизвѣстную $\frac{1}{2}(A-B)$, которую и можно опредѣлить при помощи пріема, указаннаго въ **§ 60**-мъ, вычисляя вспомогательный уголъ $\varphi$, лежащій между нулемъ и 90 градусами, по формулѣ:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{(c+a)-(c+b)}{(c+a)+(c+b)}\cot\frac{1}{2}C.\qquad(3)$$

Если теперь составить новый треугольникъ, сторонами котораго были бы $c+a$ и $c+b$, а уголъ между ними равнялся бы $C$, то, называя въ этомъ треугольникѣ черезъ $A'$ уголъ, противолежащій сторонѣ $c+a$, и черезъ $B'$ уголъ, противолежащій сторонѣ $c+b$, замѣтимъ, что полуразность $\frac{1}{2}(A'-B')$ выразитъ точно вспомогательный уголъ $\varphi$, согласно формулѣ (2) **§ 73**-го; поэтому

$$\frac{A'-B'}{2}=\varphi,\qquad\frac{A'+B'}{2}=90^0-\frac{1}{2}C,$$

откуда

$$A' = 90^0 - \frac{1}{2}C + \varphi, \quad B' = 90^0 - \frac{1}{2}C - \varphi. \tag{4}$$

Послѣ этого уравненіе (2) можетъ быть переписано въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}(A'-B')};$$

освобождаясь отъ знаменателей и полагая для сокращенія

$$\frac{A-B}{2} - \frac{A'-B'}{2} = x,$$

находимъ:

$$\sin x = 2\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(A'-B'); \tag{5}$$

зная же, что

$$\frac{A+B}{2} - \frac{A'+B'}{2} = 0,$$

выводимъ:

$$A = A' + x, \quad B = B' - x. \tag{6}$$

Уголъ $x$ вычислится по формулѣ (5), послѣ чего формулы (6) дадутъ $A$ и $B$, такъ какъ $A'$ и $B'$ извѣстны.

Чтобы вычислить $c$, обращаемся ко второму изъ уравненій (1); оно даетъ:

$$c = \frac{[(c+a)-(c+b)]\cos\frac{1}{2}C}{\sin(\varphi+x)}; \tag{7}$$

послѣ этого мы можемъ, наконецъ, вычислить $a$ и $b$ по формуламъ:

$$a = (c+a) - c, \quad b = (c+b) - c. \tag{8}$$

Вспомогательный треугольникъ, которымъ мы пользовались, всегда возможенъ, каковы бы ни были данныя $c+a$, $c+b$, $C$; отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (5) дастъ всегда вещественныя значенія для $x$; дѣйствительно, его можно переписать слѣдующимъ образомъ:

$$\sin x = \sin A' - \sin B' \tag{9}$$

и тогда видно, что вторая часть содержится между 0 и 1. Это уравненіе имѣетъ корень $x$, заключающійся между 0 и 90 градусами, и притомъ единственный, который можетъ удовлетворить нашей задачѣ; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $A' > B'$ и, слѣдовательно, уголъ $B'$—острый, то значеніе $B$, получаемое изъ второго уравне-

нія группы (6), можетъ быть положительнымъ только въ томъ случаѣ, если $x$ меньше 90 градусовъ. Но кромѣ того видно, что предложенная задача возможна только тогда, если значеніе для $x$, содержащееся между 0 и 90 градусами, меньше $B'$, что выражается неравенствомъ $\sin x < \sin B'$, или, въ силу уравненія (9), неравенствомъ:

$$\sin A' < 2\sin B';$$

это же послѣднее наравенство само равносильно слѣдующему:

$$c+a < 2(c+b).$$

Таково необходимое условіе, чтобы задача была возможна; это же условіе есть къ тому же достаточное. Дѣйствительно, если оно удовлетворено, то значенія $A$ и $B$ будутъ положительными; сверхъ того, ихъ сумма будетъ меньше 180 градусовъ; значеніе для $c$, выводимое изъ уравненія (7), будетъ тоже положительное, и очевидно, что эти значенія обратятъ уравненія (1) въ тождества. Предположимъ, теперь, что требуется рѣшить треугольникъ по элементамъ: $A$, $B$, $c$, которые мы только-что вычислили; такая задача всегда возможна, и для рѣшенія ея, очевидно, можно воспользоваться уравненіями (1), изъ которыхъ непремѣнно получатся данныя значенія для $c+a$ и $c+b$.

**Замѣчаніе.** — Если $c+a=c+b$, то углы $\varphi$ и $x$ обращаются въ нуль; $A=B=A'=B'$. Въ этомъ случаѣ формула (7) болѣе не годится для вычисленія $c$; тогда нужно обратиться къ первому изъ уравненій (1); оно даетъ:

$$c=(c+a)\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}C},$$

откуда

$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\sin\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}C-15^0\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}C+15^0\right)}.$$

Итакъ,

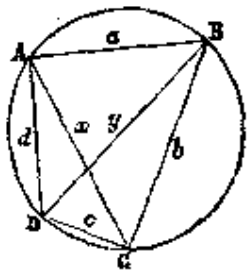
$$c-a=(c+a)\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}C-15^0\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}C+15^0\right)};$$

$c-a$ опредѣлится по этой формулѣ, послѣ чего уже не трудно получить $a$ и $c$.

*О вписанномъ четыреугольникѣ.*

**§ 97.** Мы считаемъ необходимымъ показать здѣсь же, какъ можно вычислить углы, площадь и діагонали вписаннаго четыреугольника по четыремъ его сторонамъ.

Пусть $ABCD$ (*черт.* 19) есть вписанный четыреугольникъ, стороны котораго $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ мы будемъ обозначать черезъ




*Черт.* 19.

$a$, $b$, $c$, $d$, діагонали $AC$ и $BD$—черезъ $x$ и $y$, площадь—черезъ $s$, радіусъ описаннаго круга — черезъ $R$ и углы — буквами соотвѣтственныхъ вершинъ.

Такъ какъ углы $B$ и $D$ — пополнительные, то ихъ косинусы равны, но противоположны по знаку; треугольники $ABC$ и $ACD$ даютъ:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos B, \\ x^2 &= c^2 + d^2 + 2cd\cos B; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

изъ этихъ уравненій, исключая $x$, находимъ:

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}. \qquad (2)$$

Полученная формула неудобна для логариѳмическихъ вычисленій, но ее можно преобразовать въ формулы, удобныя для такихъ вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\sin^2\frac{1}{2}B = \frac{1-\cos B}{2}, \quad \cos^2\frac{1}{2}B = \frac{1+\cos B}{2};$$

замѣняя здѣсь $\cos B$ его значеніемъ, находимъ:

$$\sin^2\frac{1}{2}B=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4(ab+cd)}=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{4(ab+cd)},$$

$$\cos^2\frac{1}{2}B=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4(ab+cd)}=\frac{(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}{4(ab+cd)}.$$

Обозначаемъ черезъ $2p$ периметръ $a+b+c+d$; тогда $a+b+c-d=2(p-d)$, . . . и, слѣдовательно,

$$\sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}},\quad \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}. \qquad (3)$$

Дѣля послѣднія равенства одно на другое, получаемъ слѣдующую формулу:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}, \qquad (4)$$

удобную для логариѳмическихъ вычисленій. Также, чтобы вычислить уголъ $A$, напишемъ формулу:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}. \qquad (5)$$

Когда углы четыреугольника извѣстны, то діагонали находятся по одному изъ методовъ, указанныхъ въ § 87-мъ. Что касается площади $s$, то она представитъ сумму площадей треугольниковъ $ABC$ и $ADC$, т.-е. (§ 75)

$$s=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B;$$

умножая же уравненія (3) одно на другое, пишемъ:

$$\sin B=2\,\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

слѣдовательно,

$$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \qquad (6)$$

Если предположить, что сторона $d$ обращается въ нуль, то эта формула перейдетъ въ формулу, выражающую площадь треугольника въ функціи отъ трехъ сторонъ.

Если требуется вычислить непосредственно діагонали $x$ и $y$, то подставляютъ въ одно изъ уравненій (1) значеніе $\cos B$ изъ уравненія (2); тогда

$$x^2 = \frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd},$$

или

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}; \tag{7}$$

также

$$y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}; \tag{8}$$

однако, эти формулы, (7) и (8), неудобны для логариѳмическихъ вычисленій.

Умножая и дѣля уравненія (7) и (8) одно на другое, получаемъ формулы:

$$xy = ac+bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}, \tag{9}$$

выражающія двѣ извѣстныя геометрическія теоремы.

Можно, наконецъ, выразить радіусъ $R$ описаннаго круга въ функціи отъ четырехъ сторонъ. Въ самомъ дѣлѣ, по § 76-му

$$R = \frac{x}{2\sin B},$$

откуда

$$R = \frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}. \tag{10}$$

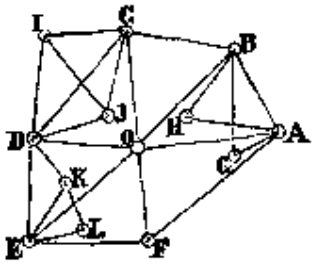
*Дѣйствія на земной поверхности.*

**§ 98. Тріангуляція.**—Всякая *съемка* плана мѣстности, города, и т. д. съ нѣкоторою точностью основывается на предварительно вычисленной *тріангуляціи*. Такъ называется опредѣленіе значеній всѣхъ элементовъ ряда или *сѣти* прилегающихъ другъ къ другу треугольниковъ и связанныхъ взаимно точками, выбранными на мѣстности произвольно. Всякій разъ, когда мѣстность не вполнѣ горизонтальна, что чаще всего и случается, нужно вообразить, что такая сѣть проектирована на горизонтальную плоскость, расположенную ниже; элементы этой проекціи, или, какъ говорятъ, сѣти, *приведенной къ горизонту*, и важно знать и умѣть опредѣлять.

Всѣ углы треугольниковъ измѣряются инструментомъ, *угломѣромъ* или лучше *теодолитомъ*, который даетъ углы вполнѣ приведенные къ горизонту. Изъ линій только одна измѣряется непосредственно, при помощи *землемѣрной цѣпи* или особаго *прибора съ жезлами*; ее называютъ *базисомъ*. Другія стороны треугольниковъ опредѣляются вычисленіемъ.

Весьма важно выбрать надлежащимъ образомъ точки для тригонометрической сѣти, чтобы имѣть только *выгодные* треугольники, т.-е. такіе треугольники, въ которыхъ ни одинъ изъ угловъ не былъ бы слишкомъ острымъ. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно видѣть, что точка плохо опредѣлена, если она задается пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, образующихъ между собою весьма малый уголъ, и именно въ томъ смыслѣ, что самая легкая ошибка въ значеніи угла можетъ повести за собою значительную ошибку въ положеніи точки. Вотъ въ общихъ чертахъ обычный ходъ тріангуляціи.

Послѣ предварительнаго изученія мѣстности, которую требуется нанести на планъ, выбираютъ центральную точку $O$ (*черт.* 20),




*Черт.* 20.

которая могла бы быть замѣчена издали, какъ напр., вершину колокольни, или шестъ на высокомъ зданіи, или даже простую вѣху съ сигнальнымъ знакомъ, если мѣстность—открытая. Затѣмъ выбираютъ, въ предѣлахъ плана, пять, шесть или болѣе точекъ, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, которыя были бы видны изъ точки $O$ и притомъ такія, чтобы треугольники: $ABO$, $BCO$, . . . были бы наивыгоднѣйшими. Важно также, чтобы одинъ изъ боковъ многоугольника $ABCDEF$, напр. $AB$, могъ бы быть измѣренъ непосредственно и принятъ за базисъ.

Когда опредѣлена одна изъ сторонъ многоугольника, напр. $AB$, и вершины отмѣчены вѣхами или какимъ-нибудь другимъ знакомъ, то переходятъ послѣдовательно изъ одной вершины въ другую и

измѣряютъ : въ точкѣ $A$ углы $OAF$ и $OAB$, въ точкѣ $B$ углы $OBA$ и $OBC$, ..., наконецъ, въ послѣдней вершинѣ $F$ углы $OFE$ и $OFA$. Благодаря этимъ измѣреніямъ, мы можемъ легко опредѣлить каждый изъ угловъ при точкѣ $O$ и непосредственное ихъ опредѣленіе является лишнимъ, лишь бы только наблюденные углы были бы измѣрены съ достаточною точностью. Величину этой точности мы можемъ найти, складывая всѣ наблюденные углы и сравнивая ихъ сумму съ суммою угловъ многоугольника, извѣстною заранѣе. (Если многоугольникъ о шести сторонахъ, какъ на нашемъ чертежѣ, то сумма угловъ равна $180^0 \times 4$ или 720 градусамъ). Разность между двумя суммами, раздѣленная на удвоенное число сторонъ многоугольника, будетъ среднею ошибкою наблюденій. Если эта средняя ошибка превзойдетъ ошибку, допускаемую самимъ инструментомъ, то нужно дѣйствія начать снова; въ противномъ случаѣ наблюденія можно считать точными и не прибѣгать къ непосредственному измѣренію угловъ при точкѣ $O$; но въ такомъ случаѣ наблюденные углы исправляютъ, увеличивая или уменьшая каждый изъ нихъ на среднюю ошибку, о которой мы только-что говорили.

Когда наблюденія произведены и результаты исправлены, какъ сказано выше, то приступаютъ къ вычисленію треугольниковъ. Первый треугольникъ $ABO$, въ которомъ извѣстны сторона $AB$ и углы, дастъ стороны $AO$ и $BO$ (первый случай косоугольныхъ треугольниковъ); второй треугольникъ $BCO$, въ которомъ теперь извѣстны сторона $OB$ и углы, дастъ $BC$ и $CO$; третій $CD$ и $DO$, ...; наконецъ, послѣдній $FA$ и $AO$. При этомъ мы получаемъ средство повѣрить наши дѣйствія: значеніе стороны $AO$, выведенное изъ послѣдняго треугольника, должно совпасть съ начальнымъ значеніемъ.

Эта первая сѣть треугольниковъ составляетъ такъ называемую *главную сѣть тріангуляціи*. Всѣ ея стороны могутъ служить въ свою очередь базисами для нанесенія на планъ другихъ точекъ и такъ какъ онѣ расходятся въ различныхъ направленіяхъ, то всегда можно распорядиться такъ, чтобы имѣть только наивыгодные треугольники. Такимъ образомъ будутъ нанесены на планъ точки $G$ и $H$, если ихъ связать со стороною $AB$, измѣривъ углы при точкахъ $A$ и $B$ въ треугольникахъ $ABG$ и $ABH$; далѣе, вычисляютъ стороны этихъ треугольниковъ. Равнымъ образомъ, наносятъ на планъ точки $I$ и $J$, связывая ихъ со стороною $CD$ глав-

наго многоугольника, и точку $K$, связывая ее со стороною $ED$. Наконецъ, когда станутъ извѣстными стороны этихъ второклассныхъ треугольниковъ, то можно принять ихъ также за базисы; напр., можно нанести на планъ точку $L$, связывая ее со стороною $EK$.

Еслибы по характеру мѣстности нельзя было бы взять за базисъ ни одну изъ сторонъ главнаго многоугольника, то пришлось бы измѣрить нѣкоторую такую часть базиса, которая могла бы быть связана съ одною изъ этихъ сторонъ, напр. съ $AB$, посредствомъ одного или самое большее двухъ треугольниковъ. Вычисленіе этихъ треугольниковъ дало бы $AB$ и всѣ дальнѣйшія дѣйствія продолжались бы такъ, какъ еслибы сторона $AB$ была измѣрена непосредственно.

Часто за главный многоугольникъ берутъ простой треугольникъ, а за базисъ одну изъ сторонъ этого треугольника. Въ этомъ случаѣ измѣряютъ три угла непосредственно; если сумма наблюденныхъ угловъ отличается отъ 180 градусовъ, то берутъ треть разности между этою суммою и 180 градусами: это есть средняя ошибка изъ трехъ наблюденій. Если эта средняя ошибка допустима, то исправляютъ наблюденные углы, какъ сказано выше, и рѣшаютъ затѣмъ треугольникъ. Зная же всѣ три стороны, можно всякую точку мѣстности нанести на планъ, связывая ее съ одною изъ сторонъ этого треугольника.

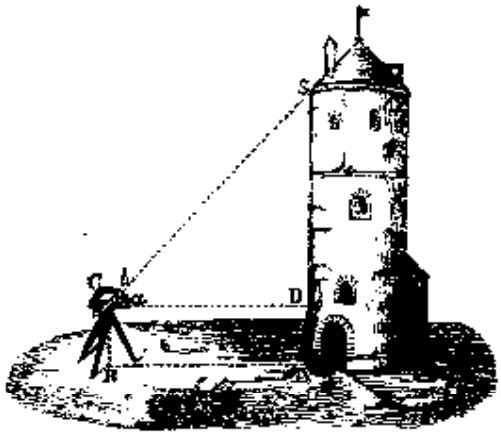
Заканчивая эту главу, мы разберемъ нѣсколько вопросовъ, часто представляющихся въ межеваніи и въ снятіи плановъ. Во всѣхъ этихъ вопросахъ данными служатъ базисъ, который можно измѣрить цѣпью, и углы, для измѣренія которыхъ можно употреблять простой угломѣръ.

### *Задачи изъ Практической тригонометріи.*

**§ 99. Задача I.** — *Найти высоту башни, къ подножію которой можно подойти и основаніе которой расположено на мѣстности почти горизонтальной.*

Пусть (*черт.* 21) $S$ есть вершина башни и $SA$ — ея высота. Берутъ угломѣрный снарядъ и устанавливаютъ его въ такомъ мѣстѣ, разстояніе котораго до башни было бы ни слишкомъ велико, ни слишкомъ мало сравнительно съ ея высотою. *Лимбъ* ставятъ

въ такой вертикальной плоскости, которая проходила бы черезъ вершину башни и притомъ такъ, чтобы его діаметръ былъ горизонталенъ. *Алидаду* же вращаютъ до тѣхъ поръ, пока не увидятъ на серединѣ нити ея *діоптровъ* или ея зрительной трубы вершину $S$ башни, и тогда отсчитываютъ по лимбу дугу $ab$ между горизонтальнымъ діаметромъ и алидадою; это будетъ уголъ $C$ прямоугольнаго треугольника $SCD$. Затѣмъ берутъ при помощи отвѣса проекцію $B$ центра инструмента; исходя изъ этой точки $B$, ведутъ прямую линію въ направленіи діаметра $Ca$ и измѣряютъ цѣпью горизон-



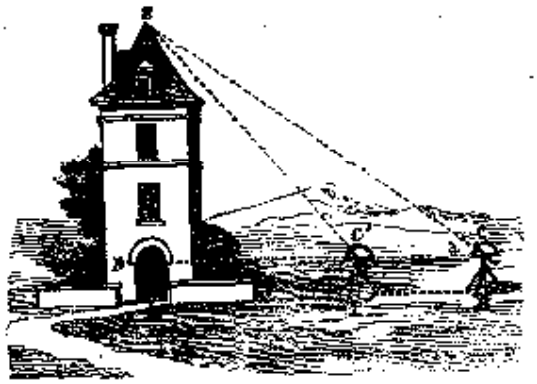
*Черт.* 21.

тальное разстояніе $BA$, отсчитанное въ этомъ направленіи отъ точки $B$ до башни. Такъ какъ $CD = BA$, то изъ прямоугольнаго треугольника $SCD$, въ которомъ такимъ образомъ извѣстны катетъ $CD$ и острый уголъ $SCD$, вычисляютъ $SD$ и прибавляютъ $AD$, или, что одно и то же, высоту $BC$ угломѣрнаго снаряда; сумма и будетъ искомая высота.

**§ 100. Задача II.** — *Найти высоту башни, къ подножію которой нельзя подойти и основаніе которой расположено на мѣстности почти горизонтальной.*

Пусть (*черт.* 22) $AS$ есть высота башни, къ подножію которой нельзя подойти. Угломѣрный снарядъ устанавливаютъ въ нѣкоторомъ мѣстѣ $B$; лимбъ, какъ и въ предыдущей задачѣ, ставятъ вертикально такъ, чтобы его діаметръ былъ горизонталенъ и чтобы его плоскость проходила черезъ вершину $S$. Алидаду инструмента направляютъ на вершину $S$ и отсчитываютъ уголъ $SCD$. Затѣмъ ведутъ прямую линію $BB'$ въ направленіи горизонтальнаго діаметра $Ca$ и переносятъ угломѣрный снарядъ параллельно самому себѣ такъ, чтобы его центръ проектировался въ точку $B'$; тогда снова

направляютъ алидаду инструмента на точку $S$ и отсчитываютъ уголъ $SC'D$. Наконецъ, измѣряютъ цѣпью линію $BB'=CC'$. При-



*Черт.* 22.

нимая во вниманіе эти измѣренія, мы изъ треугольника $SCC'$ находимъ:

$$\frac{SC}{BB'}=\frac{\sin SC'D}{\sin(SC'D-SCD)},\quad \text{откуда}\quad SC=\frac{BB'\sin SC'D}{\sin(SC'D-SCD)};$$

изъ прямоугольнаго же треугольника $SCD$

$$SD=SC\sin SCD;$$

слѣдовательно,

$$SD=\frac{BB'\sin SCD\sin SC'D}{\sin(SC'D-SCD)}.$$

Такимъ образомъ, $SD$ можетъ быть вычислено по формулѣ:

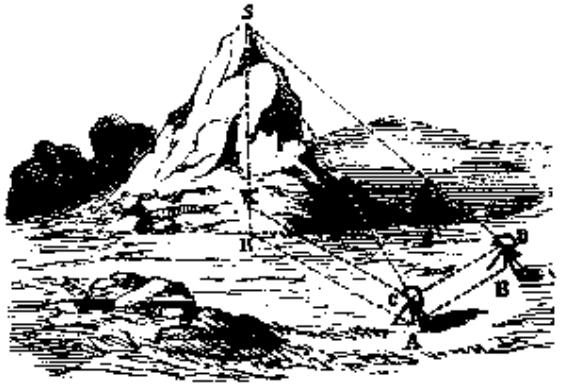
$$\log SD=\log BB'+\log\sin SCD+\log SC'D-\log\sin(SC'D-SCD).$$

Прикладывая, наконецъ, къ результату высоту угломѣрнаго снаряда, получимъ искомую высоту.

**§ 101. Задача III.**—*Найти высоту горы.*

Пусть $SH$ (*черт.* 23) есть высота, которую нужно измѣрить. Выбираютъ два пункта $A$ и $B$, изъ которыхъ одинъ $A$ былъ бы почти въ горизонтальной плоскости съ подножіемъ высоты $SH$, и притомъ такіе, чтобы можно было легко измѣрить цѣпью дѣйствительное разстояніе между точками $A$ и $B$. Устанавливаютъ угломѣрный снарядъ въ первомъ пунктѣ такъ, чтобы центръ лимба приходился въ точкѣ $C$, находящейся на вертикали, возставленной въ точкѣ $A$, и утверждаютъ въ $B$ вѣху, снабженную сигнальнымъ значкомъ $D$; плоскость лимба приводятъ въ такое положеніе, чтобы

она проходила черезъ точку $S$ и черезъ сигналъ $D$; послѣ этого измѣряютъ уголъ $SCD$, направляя послѣдовательно алидаду на точку $S$ и на сигналъ $D$; затѣмъ, не сдвигая съ мѣста основанія инструмента, устанавливаютъ лимбъ вертикально такъ, чтобы его діаметръ былъ горизонтвленъ и чтобы его плоскость проходила всегда черезъ точку $S$; послѣ этого направляютъ алидаду на точку $S$




*Черт. 23.*

и отсчитываютъ уголъ $SCK$, который она образуетъ съ діаметромъ лимба. Наконецъ, переносятъ инструментъ во второй изъ избранныхъ пунктовъ и устанавливаютъ такимъ образомъ, чтобы его центръ пришелся въ точкѣ $D$, проекція которой есть точка $B$; далѣе поступаютъ такъ же, какъ и въ предыдущемъ олучаѣ и измѣряютъ уголъ $SDC$.

Базисъ $AB = CD$ измѣренъ цѣпью, какъ сказано выше; зная же сторону $CD$ и углы треугольника $SCD$, пишемъ:

$$SC = \frac{AB \sin SDC}{\sin CSD};$$

далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника $CSK$

$$SK = SC \sin SCK;$$

слѣдовательно,

$$SK = \frac{AB \sin SDC \sin SCK}{\sin CSD}$$

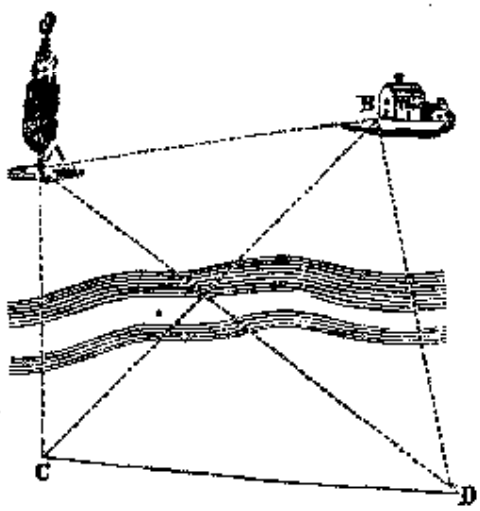
и

$$\log SK = \log AB + \log \sin SDC + \log \sin SCK - \log \sin CSD.$$

По этой формулѣ вычисляютъ $SK$ и, прикладывая къ полученному результату высоту $AC = KH$ угломѣрнаго снаряда, получаютъ искомую высоту.

**§ 102. Задача IV.**—*Найти разстояніе нѣкоторой точки до другой, неприступной.*

Пусть $C$ (*черт.* 24) есть точка, въ которой можетъ помѣститься наблюдатель, $A$—неприступная точка и $AC$—искомое разстояніе.




*Черт.* 24.

Измѣряютъ цѣпью какой-нибудь базисъ $CD$ отъ точки $C$; затѣмъ измѣряютъ угломѣрнымъ снарядомъ углы $ACD$ и $ADC$, изъ которыхъ выводятъ значеніе угла $CAD$; наконецъ, вычисляютъ сторону $AC$ по формулѣ:

$$AC = \frac{CD \sin ADC}{\sin CAD}.$$

**§ 103. Задача V.**—*Найти разстояніе между двумя неприступными точками.*

Пусть $A$ и $B$ (*черт.* 24) будутъ двѣ неприступныя точки, разстояніе между которыми требуется опредѣлить.

Измѣряютъ при помощи цѣпи базисъ $CD$ на той части мѣстности, гдѣ можно сдѣлать установку; затѣмъ измѣряютъ угломѣрнымъ снарядомъ пять угловъ: $BDC$, $ADC$, $ACD$, $BCD$ и $ACB$. Тогда въ треугольникахъ $ACD$ и $BCD$, въ которыхъ извѣстны сторона $CD$ и углы, можно вычислить стороны $AC$ и $BC$. Вычисливъ ихъ, находятъ въ треугольникѣ $ACB$ уголъ $C$ и двѣ стороны, заключающія его; отсюда слѣдуетъ, что можно вычислить сторону $AB$ и задача будетъ рѣшена.

Вотъ простѣйшій пріемъ располагать вычисленія. Назовемъ, какъ обыкновенно, черезъ $A$, $B$, $C$ углы треугольника $ABC$ и

черезъ $a$, $b$, $c$ соотвѣтственно противолежащія стороны; кромѣ того положимъ $CD = d$. Треугольники $BCD$ и $ACD$ даютъ соотвѣтственно:

$$a = \frac{d \sin BDC}{\sin CBD}, \quad b = \frac{d \sin ADC}{\sin CAD},$$

откуда

$$\log a = \log d + \log \sin BDC - \log \sin CBD,$$
$$\log b = \log d + \log \sin ADC - \log \sin CAD.$$

Если теперь ввести вспомогательный уголъ $\varphi$ посредствомъ уравненія:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a}{b},$$

то треугольникъ $ABC$ дастъ (§ 87):

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B) = \operatorname{tang}(\varphi - 45^0) \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Сначала вычисляется уголъ $\varphi$ по формулѣ:

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log a - \log b,$$

или

$$\left.\begin{aligned} \log \operatorname{tang} \varphi = {} & \log \sin BDC + \log \sin CAD - \\ & - \log \sin CBD - \log \sin ADC, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

а затѣмъ уголъ $\frac{1}{2}(A - B)$ по формулѣ:

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B) = \log \operatorname{tang}(\varphi - 45^0) + \log \operatorname{cot} \tfrac{1}{2} C. \qquad (2)$$

Зная $A - B$ и $A + B$, можно вычислить уголъ $A$, а тогда, наконецъ, мы найдемъ и искомое разстояніе по формулѣ:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

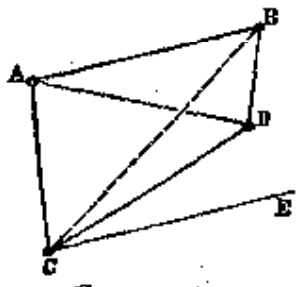
откуда

$$\left.\begin{aligned} \log c = {} & \log d + \log \sin BDC - \log \sin CBD + \\ & + \log \sin C - \log \sin A. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

**Замѣчаніе.**—Необходимо, какъ мы сказали, измѣрить непосредственно уголъ $ACB$; дѣйствительно, этотъ уголъ равенъ разности угловъ $ACD$ и $BCD$ только въ очень рѣдкомъ случаѣ, когда четыре точки: $A$, $B$, $C$, $D$ находятся въ одной плоскости.

**§ 104. Задача VI.**—*Черезъ доступную точку на ровной мѣстности провести прямую, параллельную неприступной прямой.*

Пусть (*черт.* 25) $C$ есть доступная точка и $AB$—неприступная прямая; для вычисленія угла $CAB$ поступаютъ такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ. Когда этотъ уголъ станетъ извѣстнымъ, уста-

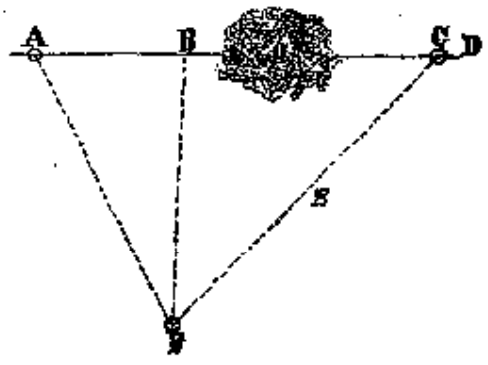



*Черт.* 25.

навливаютъ угломѣрный снарядъ въ $C$ такъ, чтобы діаметръ лимба былъ бы направленъ по $CA$, и вращаютъ алидаду до тѣхъ поръ, пока дуга лимба, отсчитанная отъ діаметра, не будетъ равна пополненію до $180^0$ угла $CAB$; наконецъ, проводятъ прямую линію $CE$, пользуясь вѣхами, въ направленіи алидады, которая и будетъ искомой линіей.

**§ 105. Задача VII.**—*Продолжить линію на мѣстности за предметъ, мѣшающій видѣть направленіе этой линіи.*

Пусть (*черт.* 26) $AB$ есть прямая, для которой требуется начертить продолженіе за предметомъ $O$. При помощи цѣпи измѣряютъ длину $AB$; затѣмъ выбираютъ пунктъ $E$, который можно



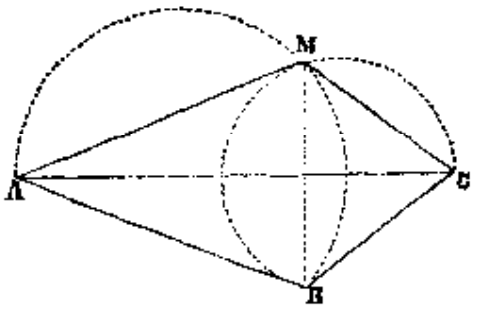

*Черт.* 26.

было бы замѣтить изъ точекъ $A$ и $B$ и изъ котораго можно было бы видѣть ту часть мѣстности, гдѣ должно находиться продолженіе $AB$. Изъ точекъ $A$ и $B$ измѣряютъ углы $A$ и $B$ треугольника $ABE$ и вычисляютъ сторону $AE$; исходя изъ точки $E$, наносятъ прямую

линію $EF$ въ направленіи къ той части мѣстности, которая находится въ сторонѣ отъ предмета $O$. Измѣряютъ уголъ $AEF$, и, если $C$ обозначаетъ точку встрѣчи прямой линіи $EF$ съ продолженіемъ $AB$, то въ треугольникѣ $ACE$ будутъ извѣстны стороны $AE$ и углы; слѣдовательно, можно вычислить $EC$, а затѣмъ съ помощью цѣпи опредѣлимъ точку $C$ на мѣстности; далѣе, ведя прямую линію $CD$, которая составляетъ съ $EC$ уголъ, равный пополненію $ACE$ до 180°, мы получимъ искомое продолженіе.

Если прямая $AB$ недоступна, то, чтобы измѣрить элементы треугольника $ABE$, пользуются, какъ въ задачѣ V, вспомогательнымъ базисомъ, проведеннымъ черезъ точку $E$.

**§ 106. Задача VIII.**—*Три точки: $A$, $B$, $C$ (черт. 27) расположены на ровной мѣстности и нанесены на карту; опредѣлить на этой картѣ точку $M$, изъ которой разстоянія $AB$ и $BC$ были бы видны подъ углами $\alpha$ и $\beta$.*




*Черт. 27.*

Точка $M$ находится на пересѣченіи сегментовъ, вмѣщающихъ углы $\alpha$ и $\beta$ и построенныхъ соотвѣтственно на $AB$ и $BC$, но здѣсь требуется связать эту точку съ данными точками: $A$, $B$, $C$ посредствомъ вычисленныхъ элементовъ.

Пусть $AB = a$, $BC = b$; за неизвѣстныя мы примемъ углы $MAB = x$ и $MCB = y$. Треугольники $AMB$ и $CMB$ даютъ:

$$BM = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}, \quad BM = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

откуда

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$$

Пусть $\varphi$ есть вспомогательный уголъ, опредѣляемый изъ равенства:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta};$$

тогда

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tang}\varphi,$$

откуда

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - 1}{\operatorname{tang}\varphi + 1},$$

или (§ 16)

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}45^0}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}45^0} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^0).$$

Кромѣ того, обозначая черезъ $\omega$ уголъ $ABC$, мы можемъ написать:

$$\frac{1}{2}(x+y) = 180^0 - \frac{\alpha+\beta+\omega}{2};$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang}(\varphi - 45^0)\operatorname{tang}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+\omega}{2}\right).$$

По этой формулѣ можетъ быть вычисленъ уголъ $\frac{1}{2}(x-y)$, а такъ какъ уголъ $\frac{1}{2}(x+y)$ извѣстенъ, то будутъ извѣстны также углы $x$ и $y$, опредѣляющіе положеніе точки $M$.

Замѣчаніе.—Если одинъ изъ множителей выраженія $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)$ есть нуль, а другой при этомъ не обращается въ безконечность, то углы $x$ и $y$ равны между свбою. Но если второй множитель обращается въ безконечность, а первый равенъ нулю, то значеніе $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Можно провѣрить, что въ этомъ случаѣ задача, дѣйствительно, неопредѣленная. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы множитель

$$\operatorname{tang}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+\omega}{2}\right)$$

обращался въ безконечность, необходимо, чтобы

$$\alpha+\beta+\omega = 180^0,$$

а это значитъ, что четыреугольникъ $ABCM$ можетъ быть вписанъ въ кругъ; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ оба сегмента, вмѣщающіе углы $\alpha$ и $\beta$ и дающіе въ пересѣченіи точку $M$, совпа-

дають. Тогда множитель $\operatorname{tang}(\varphi - 45^0)$ есть нуль; въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{\sin\beta} : \frac{a}{\sin\alpha}$, но такъ какъ $\frac{b}{\sin\beta}$ и $\frac{a}{\sin\alpha}$ суть діаметры круговъ, описанныхъ около треугольниковъ $ABM$ и $BCM$ (§ 76) и такъ какъ оба эти круга совпадаютъ, то $\operatorname{tang}\varphi = 1$; иначе говоря, $\varphi = 45^0$ и $\operatorname{tang}(\varphi - 45^0) = 0$.

### УПРАЖНЕНІЯ.

I. Какой долженъ быть радіусъ круга, чтобы разность между дугою въ 10 метровъ и ея хордою была бы меньше 1 миллиметра?

II. Рѣшить треугольникъ, зная основаніе, высоту и разность угловъ при основаніи.

III. Рѣшить треугольникъ по тремъ высотамъ.

IV. Рѣшить треугольникъ по радіусамъ вневписанныхъ круговъ.

V. Вычислить площадь трапеціи по четыремъ сторонамъ.

VI. Построить равносторонній треугольникъ, вершины котораго лежали бы на трехъ концентрическихъ окружностяхъ, или на трехъ параллельныхъ прямыхъ, расположенныхъ въ одной или въ разныхъ плоскостяхъ.

VII. Черезъ точку $O$, взятую на продолженіи діаметра $AB$ круга, центръ котораго есть точка $C$, проводятъ сѣкущую $OMM'$; требуется доказать, что произведеніе $\operatorname{tang}\frac{1}{2}MCO \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}M'CO$ есть величина постоянная, какова бы ни была сѣкущая, проведенная черезъ $O$.

VIII. Четыре прямыя: $OP$, $OA$, $OQ$, $OB$, исходящія изъ одной точки, пересѣчены сѣкущею $PAQB$; доказать, что отношеніе $\frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB}$ есть величина постоянная.

IX. Четыре плоскости: $OP$, $OA$, $OQ$, $OB$, проведенныя черезъ одну и ту же прямую $O$, пересѣчены сѣкущею $PAQB$; доказать, что отношеніе: $\frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB}$ есть величина постоянная.

X. Найти площади правильныхъ многоугольниковъ о $n$ сторонахъ, вписаннаго и описаннаго около круга радіуса $r$, въ функціи отъ $n$ и $r$. Вывести отсюда извѣстныя соотношенія между площадями правильныхъ многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго о $n$ и $2n$ сторонахъ.

XI. Пусть треугольникъ $ABC$—прямоугольный и $A$ есть вершина прямого угла (*см.* чертежъ въ § 68-мъ); если опустить перпендикуляръ $AD$ на сторону $BC$, то, какъ извѣстно, $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}$. Спрашивается, будетъ ли существовать это соотношеніе и въ томъ случаѣ, если уголъ $A$ не есть прямой.

XII. Доказать, что если биссектрисы двухъ угловъ треугольника равны между собою, то такіе углы также равны между собою.